

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ג, 2013
מספר השאלון: 313, 035803
נספח: דפי נוסחאות ל-3 יחידות לימוד

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שש שאלות בנושאים:

אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

עליך לענות על ארבע שאלות — $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

סוחר קנה x טבעות זהות, ושילם עבורן בסך הכול 3600 שקל.
 5 טבעות אבדו. את יתר הטבעות מכר הסוחר במחיר שווה לכל טבעת,
 שהיה גבוה ב- 50% ממחיר הקנייה של כל אחת מהטבעות.
 הרווח של הסוחר בעסקה זו היה 1200 שקל.
 חשב כמה טבעות קנה הסוחר.

תשובה לשאלה 1

$$\frac{3600}{x} \quad \text{מחיר הקנייה של טבעת אחת:}$$

$$\frac{3600}{x} \cdot \frac{150}{100} \quad \text{מחיר המכירה של טבעת אחת:}$$

$$\frac{3600}{x} \cdot \frac{150}{100} \cdot (x - 5) \quad \begin{array}{l} \text{הסכום שקיבל הסוחר עבור מכירה} \\ \text{של } (x - 5) \text{ טבעות:} \end{array}$$

$$\frac{3600}{x} \cdot \frac{150}{100} \cdot (x - 5) - 3600 \quad \text{הרווח של הסוחר:}$$

$$\frac{3600}{x} \cdot 1.5 \cdot (x - 5) - 3600 = 1200 \quad \text{לכן יש לפתור את המשוואה:}$$

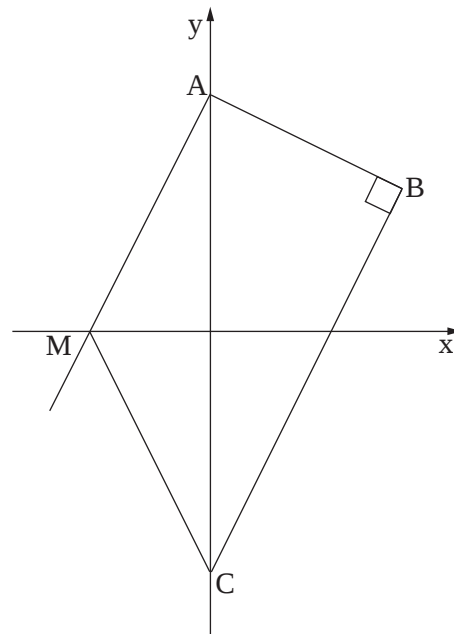
$$\Downarrow$$

$$3600 \cdot 1.5(x - 5) - 3600x = 1200x \quad \text{נכפול ב- } x \text{ ונקבל:}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 45 \text{ טבעות} \quad \text{מספר הטבעות שקנה הסוחר:}$$

שאלה 2



- I. $y = 2x + 10$ נתונים שני ישרים:
- II. $y = 2x - 10$
- ישר I חותך את ציר ה- y בנקודה A.
- ישר II חותך את ציר ה- y בנקודה C.
- דרך הנקודה A העבירו אנך לישר II, החותך את הישר II בנקודה B (ראה ציור).
- א. מצא את השיעורים של הנקודה B.
- ב. ישר I חותך את ציר ה- x בנקודה M. מצא את שטח הטרפז ABCM.

תשובה לשאלה 2

$$AB \perp BC$$

א. לפי הנתון:

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{2}$$

שיפוע AB:

$$A(0, 10)$$

שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y של הישר I:

$$y - 10 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

לכן משוואת הישר AB:

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

נקודת החיתוך B בין הישר AB

$$-\frac{1}{2}x + 10 = 2x - 10$$

לישר BC מקיימת:

$$\Downarrow$$

$$x = 8$$

שיעור ה- x של B:

$$y = 6$$

לאחר הצבת $x = 8$ במשוואת הישר BC מקבלים כי שיעור ה- y של B הוא:

$$(8, 6)$$

שיעורי הנקודה B:

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. דרך I

$$A(0, 10), B(8, 6)$$

השיעורים של A ו-B:

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(8-0)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{80}$$

אורך גובה הטרפז AB:

$$C(0, -10)$$

שיעור הנקודה C:

$$\sqrt{(8-0)^2 + (6+10)^2} = \sqrt{320}$$

אורך הבסיס הגדול BC:

השיעורים של נקודת

החיתוך של הישר $y = 2x + 10$

$$M(-5, 0)$$

עם ציר ה-x הם:

$$\sqrt{(-5-0)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{125}$$

לכן אורך הבסיס הקטן AM:

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{AB}{2}(BC + AM)$$

שטח הטרפז ABCM:

$$\Downarrow$$

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{\sqrt{80}}{2}(\sqrt{320} + \sqrt{125}) = 130$$

דרך II

שטח הטרפז ABCM הוא

סכום של שני משולשים:

$$S_{\text{טרפז}} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta ABC}$$

$$10 - (-10) = 20$$

אורך AC:

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20 = 50$$

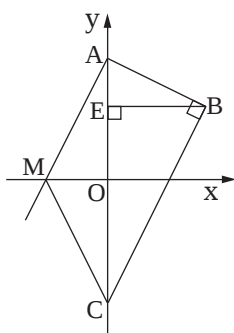
שטח משולש AMC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20 = 80$$

שטח משולש ABC:

$$S_{\text{טרפז}} = 50 + 80 = 130$$

לכן שטח הטרפז ABCM:

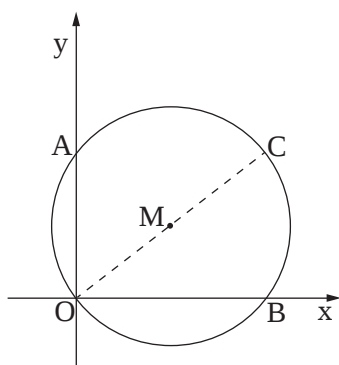


שאלה 3

נתון מעגל שמשוואתו היא $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

כמתואר בציור.



א. מצא את משוואת הישר AB.

ב. הראה כי מרכז המעגל M נמצא על הישר AB.

ג. OC הוא קוטר במעגל (ראה ציור).

מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. מצא את משוואת התיכון לצלע AC במשולש AMC.

תשובה לשאלה 3

א. שיעור ה-x של A הוא 0,

לכן נציב במשוואת המעגל

$x = 0$ ונקבל:

$$(-4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$\Downarrow$

$$(y - 3)^2 = 9$$

$\Downarrow$

$$y - 3 = \pm 3$$

$\Downarrow$

$$y = 0, \quad y = 6$$

על פי הציור A מעל הראשית,

$$y = 6$$

לכן שיעור ה-y של A:

$$A(0, 6)$$

השיעורים של A:

המשך תשובה לשאלה 3.

שיעור ה־ y של B הוא 0,
 לכן נציב במשוואת המעגל $y = 0$

ונקבל:

$$(x - 4)^2 + (-3)^2 = 25$$

$$\Downarrow$$

$$(x - 4)^2 = 16$$

$$\Downarrow$$

$$x - 4 = \pm 4$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0, x = 8$$

על פי הציור B מימין לראשית,

לכן שיעור ה־ x של B :

$$x = 8$$

$$B(8, 0)$$

השיעורים של B :

על פי השיעורים של A ו־ B

משוואת הישר AB :

$$y - 0 = \frac{0 - 6}{8 - 0}(x - 8)$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 6$$

ב. נציב את שיעורי הנקודה $M(4, 3)$

במשוואת AB ונקבל:

$$3 = -\frac{3}{4} \cdot 4 + 6$$

קיבלנו פסוק אמת, לכן M נמצאת על הישר AB .

/המשך בעמוד 7/

המשך תשובה לשאלה 3.

ג. המרכז $M(4, 3)$ הוא אמצע הקוטר OC ,לכן שיעור ה- x של C מקיים:

$$\frac{0+x}{2} = 4$$

$$\Downarrow$$

$$x = 8$$

$$\frac{0+y}{2} = 3$$

$$\Downarrow$$

$$y = 6$$

שיעור ה- y של C מקיים:

$$(8, 6)$$

השיעורים של C הם:

ד. דרך I

$$(0, 6) \quad (8, 6)$$

מצאנו כי השיעורים של A ו- C הם:
$$\Downarrow$$

$$(4, 6)$$

השיעורים של אמצע AC הם:

$$(4, 3)$$

השיעורים של מרכז המעגל הם:

$$x = 4$$

לכן משוואת התיכון היא:

דרך II

$$A(0, 6) \quad C(8, 6)$$

מצאנו:

$$\Downarrow$$

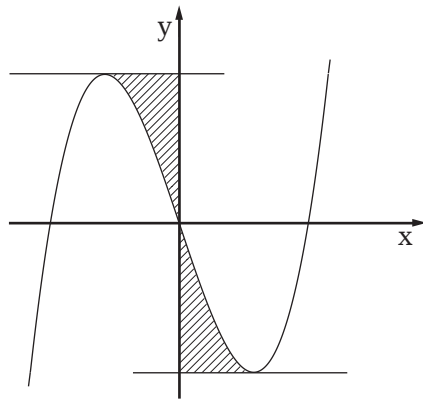
$$AC \text{ מקביל לציר ה-} x$$

$$\Downarrow$$
מאחר ש- $MA = MC$, התיכון לבסיס AC התיכון מקביל לציר ה- y הוא גובה במשולש MAC , ולכן:
$$\Downarrow$$

$$x = 4$$

מאחר ששיעור ה- x של M הוא 4, משוואת התיכון היא:

שאלה 4



נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של

הפונקציה, וקבע את סוגן על פי הציור.

העבירו משיק אחד לגרף הפונקציה

דרך נקודת המקסימום שלה,

והעבירו משיק אחר לגרף הפונקציה

דרך נקודת המינימום שלה, כמתואר בציור.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק בנקודת המקסימום,

על ידי המשיק בנקודת המינימום ועל ידי ציר ה- y (השטח המקווקו בציור).

תשובה לשאלה 4

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \text{א.}$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = -2, \quad f(-1) = 2$$

מקסימום ב- $(-1, 2)$ לכן לפי הציור:

מינימום ב- $(1, -2)$

ב. משוואת המשיק בנקודת המקסימום: $y = 2$

משוואת המשיק בנקודת המינימום: $y = -2$

השטח המבוקש הוא

סכום של שני שטחים:

$$S = \int_{-1}^0 [2 - (x^3 - 3x)] dx + \int_0^1 [x^3 - 3x - (-2)] dx$$

$\Downarrow$

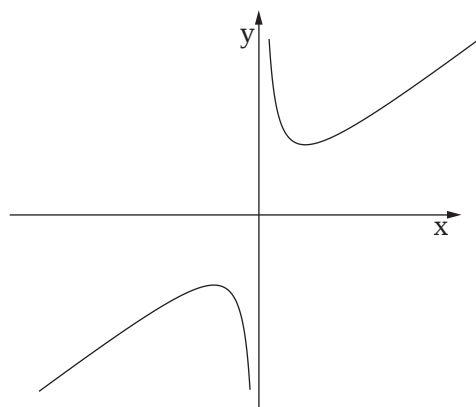
$$S = \left[2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$\Downarrow$

$$S = -(-2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}) + (\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2) = 1.5$$

שאלה 5

נתונה הפונקציה $y = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ (ראה ציור).



- א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן על פי הציור.
- ב. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, והעבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -1$.

מצא את השיעורים של נקודת המפגש בין שני המשיקים.

תשובה לשאלה 5

$$y = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{א.}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2 - \frac{1}{2x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = \pm 2$$

$$\left(\frac{1}{2}, 2 \right) \text{ מינימום ב'}$$

לכן לפי הציור:

$$\left(-\frac{1}{2}, -2 \right) \text{ מקסימום ב'}$$

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. שיפוע הישר המשיק

בנקודה שבה $x = -1$:

$$y'(-1) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

שיעור ה- y של המשיק ב- $x = -1$:

$$y(-1) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

משוואת המשיק בנקודה $x = -1$:

$$y + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(x + 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{I. } y = \frac{3}{2}x - 1$$

ישר המשיק בנקודה $x = \frac{1}{2}$,

משיק בנקודת המינימום, ולכן משוואתו:

$$\text{II. } y = 2$$

מ- I ומ- II מקבלים את המשוואה:

$$\frac{3}{2}x - 1 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$(2, 2)$$

נקודת המפגש היא:

/המשך בעמוד 11/

שאלה 6

מבין כל המספרים החיוביים x ו- y המקיימים $x^2 \cdot y = 4$, מצא את שני המספרים שעבורם הסכום $x + y$ הוא מינימלי.

תשובה לשאלה 6

$$x^2 \cdot y = 4 \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{4}{x^2} \quad \text{לכן, } x > 0$$

$$\Downarrow$$

$$x + y = x + \frac{4}{x^2} \quad \text{הסכום הוא:}$$

$$\Downarrow$$

$$M(x) = x + \frac{4}{x^2} = x + 4 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$M'(x) = 1 + 4 \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$M'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$M'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{4}{x^2} = 1$$

בדיקת מינימום:

x	1	2	3
M'(x)	-7	0	0.7
M(x)	↘		↗

מינימום מתקבל כאשר שני המספרים הם: $y = 1$, $x = 2$