

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ו'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה	—	$33 \frac{1}{3} \times 1$	—	$33 \frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי,				
	—	טריגונומטריה	—	$33 \frac{1}{3} \times 2$	—	$66 \frac{2}{3}$ נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- (2) שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
- שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה !

שאלה 1

פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.

שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.

קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה הרגיל של פועל II.

אם כל אחד מהפועלים יגביר את קצב העבודה הרגיל שלו ב- 50%,

ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב

המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II

מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.

הפועלים ביצעו יחד עבודה זו בקצב הרגיל שלהם ב- 6 ימים.

כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

תשובה לשאלה 1

א.

זמן העבודה (ימים)	קצב העבודה $(-\frac{1}{\text{יום}})$	סה"כ עבודה
x	$\frac{1}{x}$	1
$\frac{x}{1.5}$	$\frac{1.5}{x}$	1
y	$\frac{1}{y}$	1
$\frac{y}{1.5}$	$\frac{1.5}{y}$	1
t	$\frac{1}{t}$	1
T	$\frac{1}{T}$	1

המשך תשובה לשאלה 1.

$$\text{I. } \frac{t}{x} + \frac{t}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{xy}{y+x}$$

$$\text{II. } \frac{1.5}{x} \cdot T + \frac{1.5}{y} \cdot T = 1 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{xy}{1.5(y+x)}$$

$$\text{III. } t - T = \frac{2}{15}x$$

$$\frac{xy}{y+x} - \frac{xy}{1.5(y+x)} = \frac{2}{15}x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{y} = 1.5$$

מִי I ו־ II ו־ III מקבלים:

אחרי צמצום ב־ x ($x \neq 0$):

$$\text{I. } \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$$

$$\text{II. } \frac{x}{y} = 1.5$$

$$x = 15 \text{ ימים}$$

מִי I ו־ II מקבלים:

פועל I מייצר 300 חלקי חילוף ב־ 15 ימים,

$$\frac{300}{15} = 20 \text{ חלקים}$$

לכן ביום אחד פועל I מייצר:

ב.

/המשך בעמוד 4/

שאלה 2

א. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (2n-1)^3 = 4n^3 - 3n^2$$

השתמש בשוויון שבסעיף א כדי לפתור את הסעיפים ב, ג.

ב. חשב את הסכום: $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots - 52^3$

ג. הבע באמצעות n את הסכום: $1^3 - 2^3 + 3^3 \dots + (4n-1)^3$

תשובה לשאלה 2

א. בדיקה עבור $n = 1$:

אגף שמאל: $1^3 = 1$

אגף ימין: $4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 = 1$

I $1^3 - 2^3 + 3^3 + \dots + (2k-1)^3 = 4k^3 - 3k^2$ נניח כי הטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו:

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $k+1$,

II $1^3 - 2^3 + 3^3 + \dots + (2k-1)^3 - (2k)^3 + (2k+1)^3 = 4(k+1)^3 - 3(k+1)^2$ כלומר צ"ל:

הוכחה:

נשתמש בהנחת האינדוקציה, נוסיף לשני האגפים של I שני מחוברים: $-(2k)^3 + (2k+1)^3$

ונוכיח: $4k^3 - 3k^2 - (2k)^3 + (2k+1)^3 = 4(k+1)^3 - 3(k+1)^2$

$\Leftrightarrow$ $(k+1)^2$ גורם משותף באגף ימין:

$$4k^3 - 3k^2 - 8k^3 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = (k+1)^2(4k + 4 - 3)$$

$\Leftrightarrow$

$$4k^3 + 9k^2 + 6k + 1 = (k+1)^2(4k+1)$$

$\Leftrightarrow$

$$4k^3 + 9k^2 + 6k + 1 = 4k^3 + 9k^2 + 6k + 1$$

לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. נחשב על פי השוויון שבסעיף א

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 51^3 \quad \text{את ערך הביטוי}$$

$$51 = 2n - 1 \quad \text{נחשב את } n:$$

$$n = 26$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 51^3 = 4 \cdot 26^3 - 3 \cdot 26^2 \quad \text{נציב:}$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 51^3 - 52^3 = 4 \cdot 26^3 - 3 \cdot 26^2 - 52^3 \quad \text{מכאן:}$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots - 52^3 = -72,332 \quad \text{ולכן:}$$

דרך אחרת:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots - 52^3 + 53^3 = 4 \cdot 27^3 - 3 \cdot 27^2 \quad \text{על פי השוויון שבסעיף א:}$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots - 52^3 = 4 \cdot 27^3 - 3 \cdot 27^2 - 53^3 = -72,332 \quad \text{ולכן:}$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (4n-1)^3 = 4 \cdot (2n)^3 - 3 \cdot (2n)^2 \quad \text{נציב בשוויון שבסעיף א } 2n \text{ במקום } n:$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (4n-1)^3 = 32n^3 - 12n^2 \quad \text{ולכן:}$$

שאלה 3

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB.

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

תשובה לשאלה 3

א. נקודת חיתוך עם ציר ה- y : $x = 0 \Rightarrow g(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$

נקודות חיתוך עם ציר ה- x : $g(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} - x = \pi k \quad (k \text{ שלם})$

$\Downarrow$

$$x = \frac{2\pi}{3} - \pi k$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

המשך תשובה לשאלה 3.

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sin x \quad \text{ב.}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} = 0 \quad \text{לפי הנוסחה של הפרש סינוסים:}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{4\pi}{3}, \quad x = \frac{7\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{7\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{שיעורים של נקודות החיתוך בין הפונקציות:}$$

$$AB = d(x) = |f(x) - g(x)| \quad \text{ג. (1)}$$

$$AB = d(x) = \sin x - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{עבור } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$d'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

$$d''(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow d''\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \text{בדיקת מקסימום:}$$

$$AB = d(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) - \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \quad \text{עבור } \frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3} \text{ או עבור } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$d'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

$$d''(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Rightarrow d''\left(\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) < 0 \quad \text{בדיקת מקסימום:}$$

$$\left|d\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right| = \left|d\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right| = 1 \quad \text{האורך המקסימלי של הקטע AB:}$$

$$(\text{בקצה שבו } x = 0 \text{ מקבלים כי } AB = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1, \text{ ובקצוות האחרים מקבלים כי } AB = 0).$$

$$(2) \quad \text{על פי תת-סעיף ג (1), יש שני קטעים כאלה, עבור } x = \frac{5\pi}{6} \text{ ועבור } x = \frac{11\pi}{6}.$$

שאלה 4

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$$g(x) = -x^2 + c$$

b ו- c הם פרמטרים גדולים מ-0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P .

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P .

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b > 4$.

הישר $x = a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D , את הגרף של $f(x)$ בנקודה A

ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (A, D) ו- B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי המשיק המשותף

ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = -a$, הוא S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$

ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = -a$.

תשובה לשאלה 4

א. לפונקציות משיק משותף

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{בנקודה } P, \text{ לכן:}$$

$$\Downarrow$$

$$2x + 4 = -2x$$

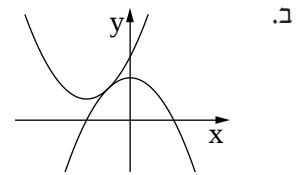
$$\Downarrow$$

$$x = -1 \quad \text{שיעור ה-} x \text{ של הנקודה } P:$$

$$f(-1) = b - 3 \quad \text{שיעור ה-} y \text{ של הנקודה } P:$$

$$P(-1, b - 3) \quad \text{נקודת ההשקה:}$$

המשך תשובה לשאלה 4.



ל- $f(x)$ נקודת מינימום ב- $(-2, b-4)$ כלומר שיעור ה- y של נקודת המינימום הוא חיובי.

ל- $g(x)$ נקודת מקסימום ב- $x = 0$. שיעור ה- x של נקודת ההשקה הוא -1 .

ג. שיפוע המשיק בנקודה $P(-1, b-3)$: $f'(-1) = g'(-1) = 2$

לכן משוואת המשיק בנקודה P : $y = 2x + b - 1$

$\Downarrow$

שיעור ה- y של הנקודה D : $y_D = 2a + b - 1$

שיעור ה- y של הנקודה A : $y_A = f(a) = a^2 + 4a + b$

$$f(-1) = g(-1)$$

$\Downarrow$

ערך הפרמטר c : $c = b - 2$

$\Downarrow$

שיעור ה- y של הנקודה B : $y_B = g(a) = -a^2 + b - 2$

$$AD = y_A - y_D = a^2 + 2a + 1$$

$$DB = y_D - y_B = a^2 + 2a + 1$$

$\Downarrow$

$$AD = BD$$

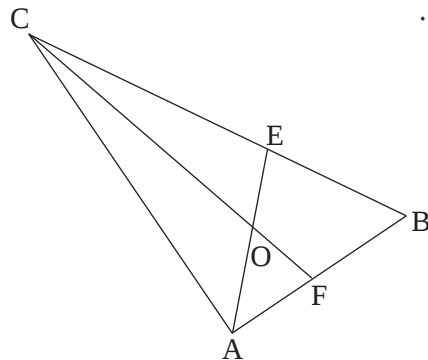
לכן PD הוא תיכון במשולש PAB .

$$\text{I. } S = \int_{-a}^a [f(x) - (2x + b - 1)] dx = \int_{-a}^a (x^2 + 2x + 1) dx \quad \text{ד.}$$

$$\text{II. } S_{\text{מבוקש}} = \int_{-a}^a [f(x) - g(x)] dx = 2 \cdot \int_{-a}^a (x^2 + 2x + 1) dx \quad \text{השטח המבוקש:}$$

$$S_{\text{מבוקש}} = 2 \cdot S \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

שאלה 5



5. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E.

המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F.

(ראה ציור).

נתון: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^\circ$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל- $\frac{1}{2}BC$.

תשובה לשאלה 5

$$\angle CAE = \angle BAE = \frac{\alpha}{2}$$

א.

מרכז מעגל החסום במשולש נמצא על חוצה זווית

$$\angle ACF = \angle BCF = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

לפי משפט הסינוסים

$$\frac{CA}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta)} = \frac{AE}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow AE = \frac{CA \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta)}$$

במשולש CAE:

לפי משפט הסינוסים

$$\frac{CF}{\sin \alpha} = \frac{CA}{\sin(\beta + 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2})} \Rightarrow CF = \frac{CA \sin \alpha}{\sin(90^\circ + \frac{\beta - \alpha}{2})}$$

במשולש CFA:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta)} \cdot \frac{\cos(\frac{\beta - \alpha}{2})}{\sin \alpha}$$

מכאן:

המשך תשובה לשאלה 5.

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(\alpha + 60^\circ) \cdot \cos(30^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2} + 60^\circ) \cdot \sin \alpha} \quad \text{ב. לפי הנתונים:}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(\alpha + 60^\circ) \cdot \cos(30^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\cos(30^\circ - \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin \alpha} \quad \text{מאחר ש-} \sin(\frac{\alpha}{2} + 60^\circ) = \cos[90^\circ - (\frac{\alpha}{2} + 60^\circ)]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin \alpha}$$

$$\Downarrow$$
לאחר פתיחת $\sin(\alpha + 60^\circ)$

$$\sin \alpha = 2 \sin 60^\circ \cos \alpha + 2 \cos 60^\circ \sin \alpha \quad \text{מקבלים:}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\Downarrow$$

BC קוטר במעגל החוסם את המשולש ABC

$$\Downarrow$$

$$\text{רדיוס} = \frac{1}{2} BC$$