מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות לבתי"ס על־יסודיים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ג

מספר השאלון: **035006**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ו'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: אלגברה

$33\frac{1}{3}$ נק' — $33\frac{1}{3}\times 1$

פרק שני: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה

$66\frac{2}{3}$ נק' — $33\frac{1}{3}\times 2$

100 נק' — סה"כ

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
   הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
   חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
   שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: بجروت للمدارس الثانويّة

موعد الامتحان: صيف 2013

رقم النموذج: **035006**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

النموذج "و"

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النموذج فصلان.

الفصل الأوّل: الجبر

$33\frac{1}{3}$ درجة — $33\frac{1}{3}\times 1$

الفصل الثاني: حساب التفاضل والتكامل، حساب المثلّثات

$66\frac{2}{3}$ درجة — $33\frac{1}{3}\times 2$

100 درجة — المجموع

ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
   فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب.
   عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
   استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

ב ה צ ל ח ה! — **نتمنّى لك النّجاح!**

السؤال 1

يعمل العامل I والعامل II في مصنع لإنتاج قطع الغيار.
ينفّذ العاملان معًا عملاً معيّنًا.
وتيرة العمل العاديّة للعامل I تختلف عن وتيرة العمل العاديّة للعامل II .
إذا زاد كلّ واحد من العاملَيْن وتيرة عمله العاديّة بـ 50% ، يكون الفرق بين زمن عمل العاملَيْن معًا بالوتيرة العاديّة وبين زمن عملهما معًا بالوتيرة المَزيدَة $\frac{2}{15}$ من الزمن الذي يحتاجه العامل I لتنفيذ العمل بمفرده بوتيرة عمله العاديّة.

أ. جد النسبة بين الزمن الذي ينفّذ فيه العامل I العمل بمفرده وبين الزمن الذي ينفّذ فيه العامل II هذا العمل بمفرده.

ب. العمل الذي ينفّذه العاملان معًا هو تحضير 300 قطعة غيار.
نفّذ العاملان معًا هذا العمل بوتيرة عملهما العاديّة في 6 أيّام.
كم قطعة غيار في اليوم يحضّر العامل I بمفرده بوتيرة عمله العاديّة؟

إجابة السؤال 1

أ.

	زمن العمل (أيّام)	وتيرة العمل ($\frac{1}{\text{يوم}}$)	العمل الكلّيّ
العامل I : بالوتيرة العاديّة	x	$\frac{1}{x}$	1
بالوتيرة المَزيدة	$\frac{x}{1.5}$	$\frac{1.5}{x}$	1
العامل II : بالوتيرة العاديّة	y	$\frac{1}{y}$	1
بالوتيرة المَزيدة	$\frac{y}{1.5}$	$\frac{1.5}{y}$	1
العامل I والعامل II معًا: بالوتيرة العاديّة	t	$\frac{1}{t}$	1
بالوتيرة المَزيدة	T	$\frac{1}{T}$	1

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة إجابة السؤال 1.

I. $\frac{t}{x}+\frac{t}{y}=1 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{xy}{y+x}$

II. $\frac{1.5}{x}\cdot T+\frac{1.5}{y}\cdot T=1 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{xy}{1.5(y+x)}$

III. $t-T=\frac{2}{15}x$

من I وَ II وَ III ينتج:

$$\frac{xy}{y+x}-\frac{xy}{1.5(y+x)}=\frac{2}{15}x$$

$$\Downarrow$$

بعد القسمة على x ($x\neq 0$):

$$\frac{x}{y}=1.5$$

ب.

I. $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1$

II. $\frac{x}{y}=1.5$

من I وَ II ينتج:

$x=15$ يومًا

العامل I يحضّر 300 قطعة غيار في 15 يومًا،

لذلك يحضّر العامل I في يوم واحد:

$\frac{300}{15}=$ 20 قطعة غيار

/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 2

أ. برهن بالاستقراء أو بأيّة طريقة أخرى أنّه لكلّ n طبيعيّ يتحقّق: $1^3-2^3+3^3-4^3+....+(2n-1)^3=4n^3-3n^2$

استعمِل المعادلة التي في البند "أ" لحلّ البندين "ب" وَ"جـ".

ب. احسب المجموع: $1^3-2^3+3^3-4^3+...-52^3$

جـ. عبّر بدلالة n عن المجموع: $1^3-2^3+3^3...+(4n-1)^3$

إجابة السؤال 2

أ. فحص بالنسبة لِـ $n=1$:

الطرف الأيسر: $1^3=1$

الطرف الأيمن: $4\cdot1^3-3\cdot1^2=1$

نفترض أنّ الادّعاء صحيح بالنسبة لِـ k طبيعيّ ما: $1^3-2^3+3^3+...+(2k-1)^3=4k^3-3k^2$ I

نبرهن أنّ الادّعاء صحيح بالنسبة لـ $k+1$،

أي يجب برهان: $1^3-2^3+3^3+...+(2k-1)^3-(2k)^3+(2k+1)^3=4(k+1)^3-3(k+1)^2$ II

برهان:

نستعمل فرضيّة الاستقراء، نضيف إلى طرفَي I حدّين: $-(2k)^3+(2k+1)^3$

ونبرهن أنّ: $4k^3-3k^2-(2k)^3+(2k+1)^3=4(k+1)^3-3(k+1)^2$

$(k+1)^2$ عامل مشترك في الطرف الأيمن:

$$\Updownarrow$$

$$4k^3-3k^2-8k^3+8k^3+12k^2+6k+1=(k+1)^2(4k+4-3)$$

$$\Updownarrow$$

$$4k^3+9k^2+6k+1=(k+1)^2(4k+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$4k^3+9k^2+6k+1=4k^3+9k^2+6k+1$$

لذلك الادّعاء صحيح لكلّ n طبيعيّ.

/ يتبع في صفحة 5 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. نحسب حسب المعادلة التي في البند "أ"

قيمة التعبير $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... + 51^3$

نحسب n : $51 = 2n - 1$

$n = 26$

نعوّض: $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... + 51^3 = 4 \cdot 26^3 - 3 \cdot 26^2$

من هنا: $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... + 51^3 - 52^3 = 4 \cdot 26^3 - 3 \cdot 26^2 - 52^3$

ولذلك: $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... - 52^3 = -72{,}332$

طريقة أخرى:

حسب المعادلة التي في البند "أ": $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... - 52^3 + 53^3 = 4 \cdot 27^3 - 3 \cdot 27^2$

ولذلك: $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... - 52^3 = 4 \cdot 27^3 - 3 \cdot 27^2 - 53^3 = -72{,}332$

جـ. نعوّض في المعادلة التي في البند "أ" 2n مكان n: $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... + (4n-1)^3 = 4 \cdot (2n)^3 - 3 \cdot (2n)^2$

ولذلك: $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + ... + (4n-1)^3 = 32n^3 - 12n^2$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 3

معطاة الدالّة $g(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$ في المجال $0\le x\le\frac{7}{3}\pi$.

أ. جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع المحورين.

ب. جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)=\sin x$.

جـ. النقطة A تتواجد على الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$، والنقطة B تتواجد على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ بحيث تكون القطعة AB موازية للمحور y .

(1) جد أكبر طول ممكن للقطعة AB .

(2) كم قطعة مثل AB ، التي طولها أكبر ما يمكن، تنتج في المجال المعطى؟ علّل.

إجابة السؤال 3

أ. نقطة التقاطع مع المحور y:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad g(0)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad (0\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2})$$

نقاط التقاطع مع المحور x :

$$g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2\pi}{3}-x=\pi k \quad (k \text{ صحيح})$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{2\pi}{3}-\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{2\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{5\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$(\frac{2\pi}{3}\,,\,0) \quad , \quad (\frac{5\pi}{3}\,,\,0)$$

/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة إجابة السؤال 3.

ب.

$$\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin x$$

$$\Downarrow$$

حسب معادلة فرق الجيوب:

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{3}+\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{4\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{7\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

إحداثيّات نقاط التقاطع بين الدالّتين:

$$(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad (\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$$

جـ. (1)

$$AB=d(x)=\left|f(x)-g(x)\right|$$

بالنسبة لِـ $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{4\pi}{3}$:

$$AB=d(x)=\sin x-\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$$

$$d'(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$$

$$d'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x-\frac{\pi}{3})=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}+\pi k \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}$$

فحص النهاية العظمى:

$$d''(x)=-\sin(x-\frac{\pi}{3}) \quad \Rightarrow \quad d''(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})<0$$

بالنسبة لِـ $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{3}$ أو بالنسبة لِـ $0\le x\le\frac{\pi}{3}$:

$$AB=d(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)-\sin x=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$$

$$d'(x)=-\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

$$d'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{11\pi}{6}$$

فحص النهاية العظمى:

$$d''(x)=-\sin(\frac{\pi}{3}-x) \quad \Rightarrow \quad d''(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6})<0$$

أكبر طول ممكن للقطعة AB:

$$\left|d(\frac{5\pi}{6})\right|=\left|d(\frac{11\pi}{6})\right|=1$$

(في الطرف الذي فيه $x=0$ ينتج أنّ $AB=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ ، وفي الأطراف الأخرى ينتج أنّ $AB=0$.)

(2) حسب البند الفرعيّ "جـ (1)"، توجد قطعتان كهذه، بالنسبة لِـ $x=\frac{5\pi}{6}$ وبالنسبة لِـ $x=\frac{11\pi}{6}$.

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 4

معطاة الدالّتان: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$g(x) = -x^2 + c$

b وَ c هما بارامتران أكبر من 0 .

يوجد للرسمين البيانيّين للدالّتين مماسّ مشترك في نقطة مشتركة P .

أ. عبّر بدلالة b (إذا دعت الحاجة) عن إحداثيّات النقطة P.

ب. ارسم في هيئة محاور واحدة رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ورسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ ، إذا عُلم أنّ $b > 4$. المستقيم $x = a$ يقطع المماسّ المشترك في النقطة D ، ويقطع الرسم البيانيّ لِـ $f(x)$ في النقطة A ويقطع الرسم البيانيّ لِـ $g(x)$ في النقطة B (D وَ A وَ B هي ثلاث نقاط مختلفة).

جـ. بيّن أنّ المستقيم PD هو مستقيم متوسّط في المثلّث PAB .

د. المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لِـ $f(x)$ والمماسّ المشترك والمستقيمين $x = a$ وَ $x = -a$ ، هي S .

عبّر بدلالة S عن المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لِـ $f(x)$ والرسم البيانيّ لِـ $g(x)$ والمستقيمين $x = a$ وَ $x = -a$.

إجابة السؤال 4

أ. للدالّتين مماسّ مشترك

في النقطة P ، لذلك: $f'(x) = g'(x)$

$\Downarrow$

$2x + 4 = -2x$

$\Downarrow$

الإحداثيّ x للنقطة P: $x = -1$

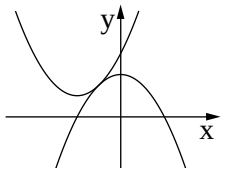
الإحداثيّ y للنقطة P: $f(-1) = b - 3$

نقطة التماسّ: $P(-1, b-3)$

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة إجابة السؤال 4.

ب.



(لِـ $f(x)$ نقطة نهاية صغرى في $(-2\,,\,b-4)$ ، أي أنّ الإحداثيّ y لنقطة النهاية الصغرى موجب.
لِـ $g(x)$ نقطة نهاية عظمى في $x=0$. الإحداثيّ x لنقطة التماسّ هو -1 .)

جـ. ميل المماسّ في النقطة $P(-1\,,\,b-3)$:

$$f'(-1)=g'(-1)=2$$

لذلك معادلة المماسّ في النقطة P:

$$y=2x+b-1$$

$$\Downarrow$$

الإحداثيّ y للنقطة D :

$$y_D=2a+b-1$$

الإحداثيّ y للنقطة A :

$$y_A=f(a)=a^2+4a+b$$

$$f(-1)=g(-1)$$

$$\Downarrow$$

قيمة البارامتر c :

$$c=b-2$$

$$\Downarrow$$

الإحداثيّ y للنقطة B :

$$y_B=g(a)=-a^2+b-2$$

$$AD=y_A-y_D=a^2+2a+1$$

$$DB=y_D-y_B=a^2+2a+1$$

$$\Downarrow$$

$$AD=BD$$

لذلك PD هو مستقيم متوسّط في المثلّث PAB .

د.

I. $$S=\int_{-a}^{a}[f(x)-(2x+b-1)]\,dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$$

المساحة المطلوبة:

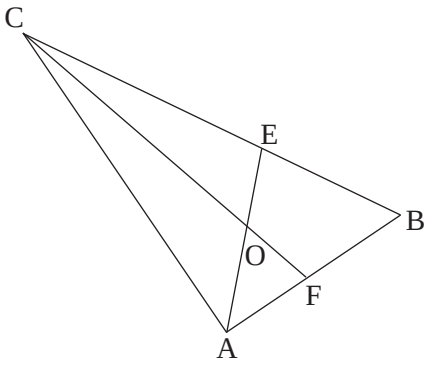
II. $$S_{\text{مطلوبة}}=\int_{-a}^{a}[f(x)-g(x)]\,dx=2\cdot\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$$

من I وَ II ينتج:

$$S_{\text{مطلوبة}}=2\cdot S$$

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 5



النقطة O هي مركز الدائرة المحصورة داخل المثلّث ABC .

امتداد AO يقطع الضلع BC في النقطة E .

امتداد CO يقطع الضلع AB في النقطة F (انظر الرسم) .

معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = \alpha$ ، $\sphericalangle ABC = \beta$.

أ. عبّر بدلالة α وَ β عن النسبة $\frac{AE}{CF}$.

ب. معطى أيضًا أنّ: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^o$.

بيّن أنّ نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ACB يساوي $\frac{1}{2}BC$.

إجابة السؤال 5

أ.

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAE = \frac{\alpha}{2}$$

مركز الدائرة المحصورة في مثلّث يقع على منصّف الزاوية

$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF = 90^o - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

حسب قانون الجيب في المثلّث CAE :

$$\frac{CA}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} = \frac{AE}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{CA\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

حسب قانون الجيب في المثلّث CFA :

$$\frac{CF}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin(\beta+90^o-\frac{\alpha+\beta}{2})} \quad \Rightarrow \quad CF = \frac{CA\sin\alpha}{\sin(90^o+\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

من هنا:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)} \cdot \frac{\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\sin\alpha}$$

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب. حسب المعطيات:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^o)\cdot\cos(30^o-\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}+60^o)\cdot\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

بما أنّ: $\sin(\frac{\alpha}{2}+60^o)=\cos\left[90^o-\left(\frac{\alpha}{2}+60^o\right)\right]$:

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^o)\cdot\cos(30^o-\frac{\alpha}{2})}{\cos(30^o-\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\alpha+60^o)}{\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

بعد فتح $\sin(\alpha+60^o)$ ينتج:

$$\sin\alpha=2\sin60^o\cos\alpha+2\cos60^o\sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=90^o$$

$$\Downarrow$$

BC قطر في دائرة تحصر المثلّث ABC

$$\Downarrow$$

$$\text{نصف القطر}=\frac{1}{2}BC$$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.