

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ה'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה	—	$33 \frac{1}{3} \times 1$	—	$33 \frac{1}{3}$	נקודות
פרק שני	—	הנדסת המישור והסתברות	—	$33 \frac{1}{3} \times 2$	—	$66 \frac{2}{3}$	נקודות
				סה"כ	—	100	נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ג כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כ פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

נתונים שני ישרים:

$$x + y - 5 = 0$$

$$y + 2(x - m) - 4 = 0, \quad m \text{ הוא פרמטר.}$$

- א. האם קיים ערך של m שעבורו הישרים מקבילים? נמק.
- ב. מצא עבור אילו ערכים של m הישרים הנתונים נחתכים בתוך ריבוע שקדקודיו הם: $(1, 3), (3, 3), (3, 5), (1, 5)$.
- ג. הישר $y = x + 2$ עובר דרך נקודת החיתוך של שני הישרים הנתונים. מצא את m .

תשובה לשאלה 1

א. שיפוע הישר $x + y - 5 = 0$ הוא -1 : $(y = -x + 5)$

שיפוע הישר $y + 2(x - m) - 4 = 0$ הוא -2 : $(y = -2x + 2m + 4)$

שיפועי הישרים שונים זה מזה ולכן (לכל ערך של m) הישרים אינם מקבילים.

ב. נקודת החיתוך של הישרים מקיימת:
$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -2x + 2m + 4 \end{cases}$$

נפתור: $-x + 5 = -2x + 2m + 4$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = 2m - 1 \\ y = 6 - 2m \end{cases}$$

נדרוש שנקודת החיתוך (x, y) תהיה בתוך הריבוע:

$$\begin{cases} 1 < x < 3 \\ 3 < y < 5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 < 2m - 1 < 3 \\ 3 < 6 - 2m < 5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 < m < 2 \\ \frac{1}{2} < m < 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

שני הישרים נחתכים בתוך הריבוע כאשר: $1 < m < 1\frac{1}{2}$

ג. הישר $y = x + 2$ עובר דרך הנקודה: $(2m - 1, 6 - 2m)$

$$\Downarrow$$

$$6 - 2m = 2m - 1 + 2$$

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{5}{4}$$

שאלה 2

נתונה סדרה חשבונית.

האיבר במקום ה-30 גדול ב-96 מהאיבר במקום ה-6.

סכום $2n$ האיברים הראשונים בסדרה גדול פי 4 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

א. מצא את הפרש הסדרה ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מחקו את $2n$ האיברים הראשונים בסדרה הנתונה.

הבע באמצעות n את הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה שנשארה לאחר המחיקה.

תשובה לשאלה 2

א. נתון: $a_{30} = a_6 + 96$

לפי הנוסחה לאיבר כללי בסדרה חשבונית: $a_1 + 29d = a_1 + 5d + 96$

$$\Downarrow \\ d = 4$$

נתון: $S_{2n} = 4 \cdot S_n$

לפי הנוסחה לסכום איברים

בסדרה חשבונית: $\frac{2n}{2} [2a_1 + d(2n - 1)] = 4 \cdot \frac{n}{2} [2a_1 + d(n - 1)]$

נחלק את שני האגפים ב- n ($n \neq 0$), ונציב $d = 4$:

$$\Downarrow \\ 2a_1 + 4(2n - 1) = 4a_1 + 8(n - 1)$$

$$\Downarrow \\ a_1 = 2$$

ב. דרך I

ההפרש בין שני איברים עוקבים בסדרה שנשארה הוא עדיין 4.

האיבר הראשון בסדרה שנשארה לאחר המחיקה הוא a_{2n+1} .

$$a_{2n+1} = a_1 + d \cdot 2n = 2 + 8n$$

הסכום T_n של n האיברים הראשונים

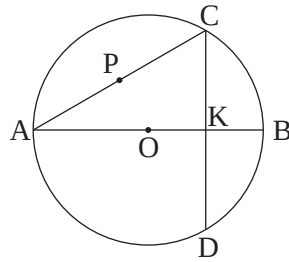
בסדרה שנשארה לאחר המחיקה הוא: $T_n = a_{2n+1} + \dots + a_{3n} = \frac{n}{2} [2(2 + 8n) + 4(n - 1)] = \frac{n}{2} [20n] = 10n^2$

דרך II

הסכום T_n של n האיברים הראשונים

בסדרה שנשארה לאחר המחיקה הוא: $T_n = S_{3n} - S_{2n} = \frac{3n}{2} [2 \cdot 2 + 4(3n - 1)] - \frac{2n}{2} [2 \cdot 2 + 4(2n - 1)] = 10n^2$

שאלה 3



AB הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O.

הקוטר AB חותך את המיתר CD בנקודה K, כמתואר בציור.

הנקודה K היא אמצע המיתר CD,

והנקודה P היא אמצע המיתר AC.

נתון: $AC = CD$.

א. הוכח: $\triangle APO \cong \triangle DKB$.

ב. הוכח: המשולש POK הוא שווה שוקיים.

ג. הבע את אורך הקטע OK ואת אורך המיתר CD באמצעות רדיוס המעגל R.

תשובה לשאלה 3

א. לפי הנתון: $CK = KD$, $AP = PC$

$\Downarrow$

קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר. $OP \perp AC$, $OK \perp CD$

לפי הנתון: $AC = CD$

$\Downarrow$

חצאי מיתרים שווים, שווים זה לזה. $AP = KD$

זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו. $\angle PAO = \angle KDB$

(מתקיים גם $OP = OK$ — מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל)

ולכן $\triangle APO \cong \triangle DKB$ על פי ז.ז.ז (או על פי צ.ז.צ.)

ב. לפי הנתון: $AC = CD$

והוכחנו: $OK \perp CD$, $OP \perp AC$

$\Downarrow$

מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל. $OP = OK$

אפשר גם להוכיח כי $OP = OK$ על פי:

חצאי מיתרים שווים, שווים זה לזה. $CP = CK$

במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו. $\angle CPK = \angle CKP$

משלימות ל- 90° . $\angle KPO = \angle PKO$

$\Downarrow$

במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות. $OP = OK$

המשך תשובה לשאלה 3

$$OP = OK$$

ג. הוכחנו בסעיף ב:

$$OP = KB$$

מהחפיפה בסעיף א נובע:

$\Downarrow$

$$OK = KB = \frac{1}{2}R$$

$$OK^2 + KD^2 = OD^2 \quad \text{לפי משפט פיתגורס ב-} \triangle OKD :$$

$$\frac{R^2}{4} + KD^2 = R^2$$

$\Downarrow$

$$KD = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

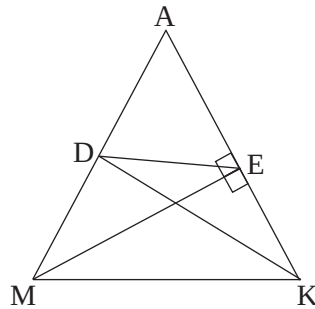
$$CD = 2 \cdot KD$$

$\Downarrow$

$$CD = \sqrt{3}R$$

/המשך בעמוד 6/

שאלה 4



במשולש שווה-שוקיים AMK ($AM = AK$)

KD הוא תיכון לשוק AM ,

ו- ME הוא גובה לשוק AK (ראה ציור).

א. הוכח כי $\angle DAE = \angle DEA$.

ב. אם נתון גם כי $MK = 2 \cdot DE$:

(1) מהו הגודל של $\angle MAK$? נמק.

(2) הוכח כי $DE \parallel MK$.

(3) ME ו- DK נחתכים בנקודה P .

מצא פי כמה גדול היקף המשולש MPK מהיקף המשולש EPD .

תשובה לשאלה 4

במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה לחצי היתר.

א. במשולש ישר-הזווית MEA : $DE = \frac{1}{2}AM = AD$

$\Downarrow$

$\angle DAE = \angle DEA$

מול צלעות שוות במשולש נמצאות זוויות שוות.

ב. (1) נתון: $MK = 2 \cdot DE$

הוכחנו בסעיף א: $DE = \frac{1}{2}AM$,

$\Downarrow$

$MK = AM$

נתון: $AM = AK$

$\Downarrow$

$\triangle AMK$ הוא שווה צלעות

$\Downarrow$

במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות זו לזו. $\angle MAK = 60^\circ$

(2) הוכחנו בסעיף א: $\angle DAE = \angle DEA$

הוכחנו בסעיף ב(1): $\triangle AMK$ הוא שווה צלעות

$\Downarrow$

$\angle DEA = \angle AKM$

$\Downarrow$

$DE \parallel MK$

שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי.

אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים.

המשך תשובה לשאלה 4.

(3) הוכחנו בסעיף ב(1): $DE \parallel MK$

$\Downarrow$

לפי משפט תאלס המורחב

או לפי דמיון בין

$$\frac{MK}{DE} = \frac{PK}{PD} = \frac{PM}{PE} \quad \Delta EPD \text{ ו- } \Delta MPK$$

$$\frac{MK}{DE} = 2 \quad \text{נתון:}$$

$\Downarrow$

$$MK + PK + PM = 2(DE + PD + PE)$$

$\Downarrow$

היקף ΔMPK גדול פי 2 מהיקף ΔEPD

שאלה 5

מפעל מייצר כובעים וצעפים. 70% ממוצרי המפעל הם כובעים, והשאר צעפים. חלק מתוצרת המפעל נפגם במהלך הייצור.

במהלך הייצור נפגמים 5% מהצעפים. 40% מהמוצרים שנפגמים הם כובעים.

א. בוחרים באקראי מוצר אחד מן המוצרים שהמפעל ייצר. מהי ההסתברות לבחור מוצר שנפגם?

ב. בוחרים באקראי כובע שהמפעל ייצר. מהי ההסתברות שהכובע שנבחר לא נפגם במהלך הייצור?

ג. בכל חודש המפעל שולח לרשתות הגדולות 30% מהכובעים שלא נפגמו ו- 60% מהצעפים שלא נפגמו.

בחודש האחרון שלח המפעל לרשתות הגדולות 4140 כובעים.

(1) כמה מוצרים ייצר המפעל בחודש האחרון?

(2) כמה צעפים שלח המפעל לרשתות הגדולות בחודש האחרון?

תשובה לשאלה 5

א. נסמן: A – המוצר המיוצר הוא כובע.

B – המוצר המיוצר פגום.

נתונים: I. $P(A) = 0.7 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0.3$

II. $P(B / \bar{A}) = 0.05$

III. $P(A / B) = 0.4$

$$P(B / \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \quad \text{מתקיים:}$$

$$\Downarrow$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B / \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.05 \cdot 0.3 = 0.015 \quad \text{מ- I, II:}$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{מתקיים:}$$

$$P(A \cap B) = 0.4 P(B) \quad \text{מ- III:}$$

$$P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(B) \quad \text{מתקיים:}$$

$$\Downarrow$$

$$0.015 + 0.4 \cdot P(B) = P(B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(B) = 0.025$$

ההסתברות לבחור מוצר שנפגם היא 0.025

המשך תשובה לשאלה 5.

	כובעים A	צעפים $\bar{A}$	
המוצר נפגם B	0.01	0.015	0.025
המוצר לא נפגם $\bar{B}$	0.69	0.285	0.975
	0.7	0.3	

ב. מקבלים: $P(A \cap B) = 0.01$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.69$$

$$P(\bar{B} / A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

$$P(\bar{B} / A) = \frac{0.69}{0.7} = \frac{69}{70} = 0.986$$

ההסתברות שהכובע שנבחר לא נפגם במהלך הייצור היא 0.986.

ג. (1) נסמן M — מספר המוצרים שהמפעל ייצר בחודש האחרון.

30% מתוך $0.69M$ נשלחו לרשתות הגדולות

↓

$$4140 = 0.3 \cdot 0.69 M$$

↓

$$M = 20,000$$

המפעל ייצר בחודש האחרון 20,000 מוצרים.

(2) מקבלים: $P(\bar{B}) = 0.975$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.285$$

60% מתוך $0.285M$ נשלחו לרשתות הגדולות

↓

$$0.6 \cdot 0.285 \cdot 20,000 = 3420$$

המפעל שלח לרשתות הגדולות בחודש האחרון 3420 צעפים.

שאלה 6

בברכת שחייה ביישוב מסוים חלק מהמבקרים מנויים לברכה, והשאר אינם מנויים. הנהלת הברכה ערכה בקרב קהל המבקרים סקר בנוגע להארכת שעות הפעילות בברכה. נמצא כי 80% מן המנויים ו-10% מבין אלה שאינם מנויים, היו מעוניינים בהארכת שעות הפעילות.

- יוסי, שענה לסקר, אמר שהוא מעוניין בהארכת שעות הפעילות בברכה.
- א. עובדת בברכה התבוננה בתוצאות הסקר, וטענה שעל פי תוצאות הסקר, הסיכוי שיוסי מנוי לברכה גדול מהסיכוי שאינו מנוי. האם טענת העובדת נכונה? נמק.
- ב. אם נניח כי מספר המנויים לברכה קטן פי 6 ממספר הלא מנויים לברכה, חשב פי כמה יהיה גדול הסיכוי שיוסי מנוי לברכה מהסיכוי שהוא אינו מנוי.
- ג. באיזה תחום צריך להיות אחוז המנויים לברכה מבין כלל המבקרים, כדי שלפחות 30% מהמבקרים יהיו מעוניינים בהארכת שעות הפעילות בברכה?

תשובה לשאלה 6

- א. טענת העובדת אינה נכונה.
- ייתכן מספר מנויים קטן, אך עדיין אחוז גבוה מתוכם יהיו מעוניינים בהארכת שעות הפעילות. אפשר לתת דוגמה נגדית לטענת העובדת:
- אם יש 100 מנויים לברכה ו-900 שאינם מנויים לברכה אז 80 מנויים ו-90 שאינם מנויים הם בעד הארכת שעות הפעילות.
- ב. נסמן: חלק המנויים ב- x
- נתון: מספר המנויים לברכה קטן פי 6 ממספר הלא מנויים לברכה.
- לכן חלק הלא מנויים הוא $6x$.

מבין המנויים, 80% מעוניינים בהארכה ולכן החלק של המנויים המעוניינים בהארכה הוא $0.8x$.

מבין הלא מנויים, 10% מעוניינים בהארכה ולכן החלק של הלא מנויים המעוניינים בהארכה הוא $0.1 \cdot 6x = 0.6x$.

החלק של המעוניינים בהארכה: $0.8x + 0.6x = 1.4x$

נחשב את היחס: $\frac{0.8x}{1.4x} \cdot \frac{0.6x}{1.4x} = \frac{0.8x}{0.6x} = \frac{4}{3}$

הסיכוי שיוסי מנוי לברכה גדול פי $\frac{4}{3}$ מהסיכוי שהוא אינו מנוי.

ג. חלק המעוניינים בהארכת שעות הפעילות הוא לפחות 0.3 (30%): $0.8x + 0.1(1-x) \geq 0.3$

$\Downarrow$

$$x \geq 0.2857$$

כדי שלפחות 30% מהמבקרים יהיו מעוניינים בהארכת שעות הפעילות של הברכה, אחוז המנויים צריך להיות לפחות 28.57%.