

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — טריגונומטריה במישור ובמרחב,

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של

הפונקציות הטריגונומטריות

—	$33 \frac{1}{3} \times 1$	—	$33 \frac{1}{3}$	נקודות
---	---------------------------	---	------------------	--------

פרק שני — חזקות ולוגריתמים,

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

—	$33 \frac{1}{3} \times 2$	—	$66 \frac{2}{3}$	נקודות
—	סה"כ	—	100	נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

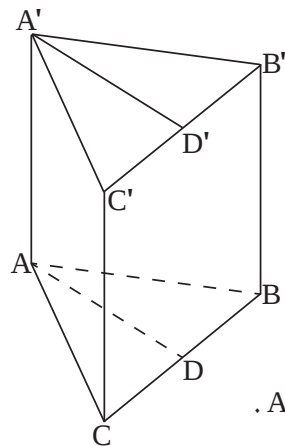
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

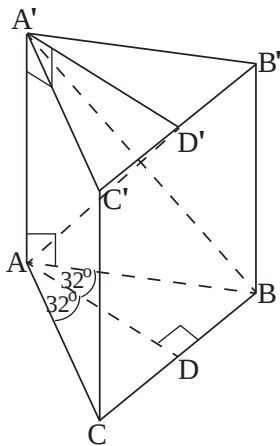
שאלה 1



במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הבסיסים הם משולשים שוויושוקיים ($AB = AC$).
 AD הוא גובה לצלע BC ,
 $A'D'$ הוא גובה לצלע $B'C'$ (ראה ציור).
 נתון: $\angle BAC = 64^\circ$, $BC = 26$ ס"מ,
 נפח המנסרה הוא 8112 סמ"ק.

- חשב את גובה המנסרה.
- חשב את הזווית שבין האלכסון $A'B$ ובין בסיס המנסרה ABC .
- חשב את $\angle A'AD'$.

תשובה לשאלה 1



א. לפי הנתון: $\angle BAC = 64^\circ$, $BC = 26$ ס"מ, $AB = AC$, $AD \perp BC$

$\Downarrow$

$$CD = DB = 13 \text{ ס"מ}, \quad \angle CAD = \angle BAD = 32^\circ$$

$\Downarrow$

$$AD = \frac{13}{\tan 32^\circ} = 20.8 \text{ ס"מ}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20.8 \cdot 26 = 270.4 \text{ סמ"ר}$$

$$V_{\text{מנסרה}} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = 8112 \text{ סמ"ק}$$

$\Downarrow$

$$AA' = 30 \text{ ס"מ}$$

ב. AA' מאונך למישור הבסיס ABC , לכן הזווית המבוקשת היא $\angle ABA'$.

$$\tan \angle ABA' = \frac{AA'}{AB}, \quad \sin 32^\circ = \frac{13}{AB}$$

$\Downarrow$

$$\tan \angle ABA' = \frac{30}{\frac{13}{\sin 32^\circ}}$$

$\Downarrow$

$$\angle ABA' = 50.73^\circ$$

המשך תשובה לשאלה 1.

ג. במשולש $A'AD'$ שבו

$$\angle AA'D' = 90^\circ, \text{ מתקיים: } \operatorname{tg} \angle A'AD' = \frac{A'D'}{AA'}$$

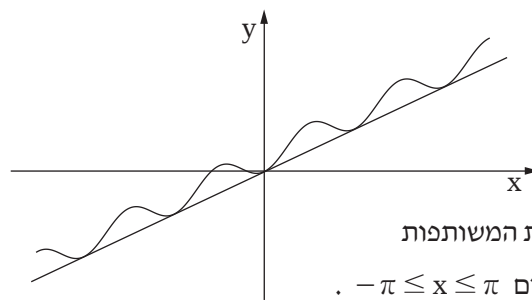
$$AA' = 30 \text{ ס"מ}, \quad A'D' = AD = 20.8 \text{ ס"מ} \quad \text{לפי סעיף א:}$$

$$\operatorname{tg} \angle A'AD' = \frac{20.8}{30} \quad \text{לכן:}$$

$\Downarrow$

$$\angle A'AD' = 34.73^\circ$$

שאלה 2



נתונה הפונקציה

$$f(x) = 0.5x - 0.5 \cos(2x) + 0.5$$

ונתון הישר $y = 0.5x$

(ראה ציור).

א. (1) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות המשותפות

לישר ולגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

(2) הראה כי הישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות שמצאת בתת-סעיף א (1).

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הישר $y = 0.5x$

בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

תשובה לשאלה 2

א. (1) בנקודה המשותפת מתקיים:

$$f(x) = y$$

$\Downarrow$

$$0.5x - 0.5 \cos(2x) + 0.5 = 0.5x$$

$\Downarrow$

$$\cos(2x) = 1$$

$\Downarrow$

$$2x = 2\pi k$$

$\Downarrow$

$$x = \pi k$$

בתחום הנתון: $k = 0 \Rightarrow x = 0$

$k = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \pi$

(2) הנגזרת של $f(x)$ היא: $f'(x) = 0.5 + \sin(2x)$

שיפוע ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ הוא: $f'(0) = 0.5$

שיפוע ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = -\pi$ הוא: $f'(\pi) = 0.5$

שיפוע ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ הוא: $f'(-\pi) = 0.5$

השיפועים זהים לשיפוע הישר $y = 0.5x$, לכן הישר משיק לפונקציה בנקודות שמצאנו.

ב. $f(x) \geq 0.5x$ לכל x , לכן: $S = \int_{-\pi}^{\pi} (0.5x - 0.5 \cos(2x) + 0.5 - 0.5x) dx$

$\Downarrow$

$$S = \left[0.5x - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$\Downarrow$

$$S = \pi$$

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x^2 - x}$, $a > 0$, a הוא פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .
 - ג. הראה שלגרף הפונקציה $f(x)$ אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x .
 - ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות a במידת הצורך).
 - ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ו. הישר $y = 2x - 9$ עובר דרך נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
- (1) האם הישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון? נמק.
- (2) מצא את a .

תשובה לשאלה 3

א. תחום ההגדרה: $x^2 - x \neq 0$

$\Downarrow$

$$x(x - 1) \neq 0$$

$\Downarrow$

$$x \neq 0, 1$$

ב. האסימפטוטות האנכיות הן $x = 0$, $x = 1$.

ג. $a = 0 \iff \frac{a}{x^2 - x} = 0 \iff f(x) = 0$

נתון: $a > 0$ ולכן לגרף הפונקציה אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x .

המשך פתרון לשאלה 3.

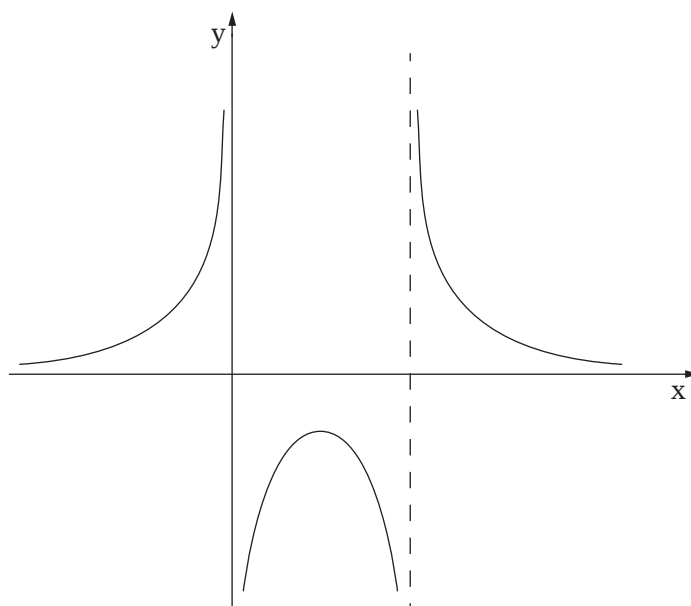
$$(x \neq 0, 1) \quad f'(x) = \frac{-a(2x-1)}{(x^2-x)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -4a$$

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2
$f'(x)$	+		+	0	-		-
$f(x)$	↗		↗		↘		↘

מקסימום: $\left(\frac{1}{2}, -4a\right)$

ה.



ו. (1) שיפוע הישר $y = 2x - 9$ הוא 2.

שיפועו של ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת קיצון הוא 0, לכן הישר $y = 2x - 9$ אינו משיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון.

(2) נציב $\left(\frac{1}{2}, -4a\right)$ במשוואת הישר $y = 2x - 9$

$$-4a = 2 \cdot \frac{1}{2} - 9$$

↓

$$a = 2$$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 e^{-\frac{x^2}{m}}$, m הוא פרמטר שונה מ-0.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ששיעור ה- x שלה הוא -2.

מצא את הערך של הפרמטר m .

הצב $m = 4$, וענה על הסעיפים שלפניך.

ג. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. לפי גרף הפונקציה $f(x)$ סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$

בתחום $-2 \leq x \leq 2$.

תשובה לשאלה 4

א. הפונקציה מוגדרת לכל x .

$$f'(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{m}} + 2x^2 \cdot \frac{(-2x)}{m} \cdot e^{-\frac{x^2}{m}} = 4xe^{-\frac{x^2}{m}} \left(1 - \frac{x^2}{m}\right) \quad \text{ב.}$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 0 = -8e^{-\frac{4}{m}} \left(1 - \frac{4}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 = 1 - \frac{4}{m}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m = 4$$

המשך תשובה לשאלה 4.

$$f(x) = 2x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} \quad \text{ג.} \quad (1)$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f'(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \quad (2)$$

$$\Updownarrow$$

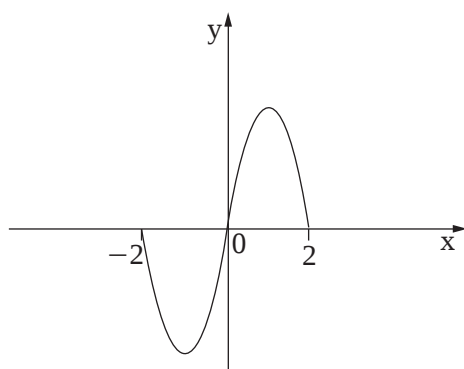
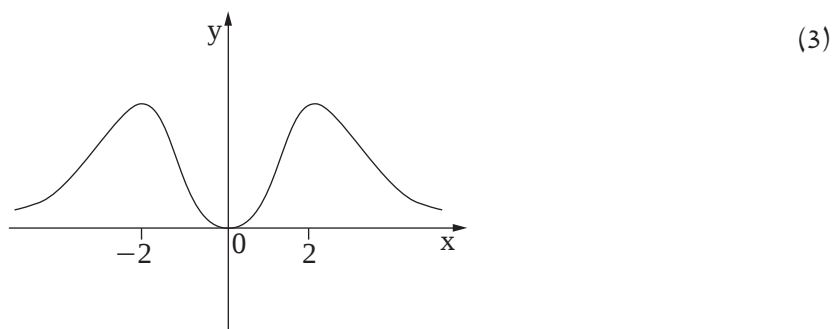
$$x = \pm 2$$

$$(-2, \frac{8}{e}), (0, 0), (2, \frac{8}{e}) \quad \text{נקודות חשודות:}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f'(x)	+	0	-	0	+	0	-
f(x)	↗		↘		↗		↘

$$(2, \frac{8}{e}), (-2, \frac{8}{e}) \quad \text{מקסימום ב':}$$

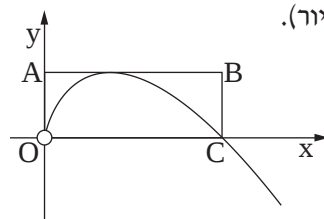
$$(0, 0) \quad \text{מינימום ב':}$$



ד.

/המשך בעמוד 9/

שאלה 5



א. נתונה הפונקציה $f(x) = -x \ln(2x)$, $x > 0$ (ראה ציור).

דרך נקודת הקיצון של הפונקציה

העבירו משיק המקביל לציר ה- x ,

ודרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x

העבירו ישר המקביל לציר ה- y .

הישרים יוצרים עם הצירים מלבן ABCO, כמתואר בציור (O – ראשית הצירים).

מצא את שטח המלבן ABCO.

בתשובתך תוכל להשאיר e .

ב. לחוקר יש היום כמות מסוימת של חומר רדיואקטיבי. הכמות קטנה בצורה מעריכית.

בעוד 10 שנים תרד ב-20% כמות החומר שיש לחוקר היום.

מצא בעוד כמה שנים מהיום תרד ב-40% כמות החומר.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

תשובה לשאלה 5

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = 0, \quad (x > 0) \quad \text{א.}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{שיעור ה-} x \text{ של } C$$

$$\Downarrow$$

$$OC = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\ln(2x) - x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = -\ln(2x) - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 2x + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{2e} \quad \text{שיעור ה-} x \text{ של נקודת הקיצון:}$$

$$f\left(\frac{1}{2e}\right) = -\frac{1}{2e} \ln \frac{2}{2e} = \frac{1}{2e}$$

$$\Downarrow$$

$$OA = \frac{1}{2e}$$

$$S_{\text{מלבן}} = OC \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2e} \quad \text{שטח המלבן ABCO:}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\text{מלבן}} = \frac{1}{4e}$$

המשך תשובה לשאלה 5.

$$M_t = M_0 \cdot q^t \quad \text{ב.}$$

$$M_0 \cdot 0.8 = M_0 \cdot q^{10} \quad \text{בעוד 10 שנים:}$$

$\Downarrow$

$$q = 0.8^{\frac{1}{10}}$$

$$M_0 \cdot 0.6 = M_0 \cdot q^x \quad \text{כאשר הכמות תרד ב- 40\%:}$$

$\Downarrow$

$$0.6 = 0.8^{\frac{x}{10}}$$

$\Downarrow$

$$\ln 0.6 = \frac{x}{10} \ln 0.8$$

$\Downarrow$

$$x = 22.89 \text{ שנים}$$