

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים — $33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות — $33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

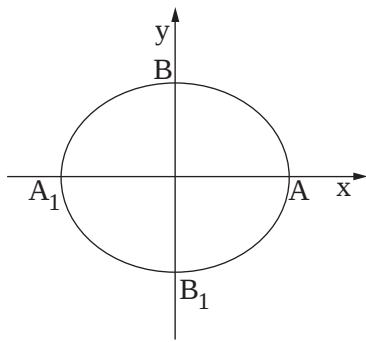
(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1



נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ (ראה ציור).

F_1 ו- F_2 הם מוקדי האליפסה

וקדקודיה הם A, A_1, B, B_1 .

נתון כי המוקד F_1 הוא אמצע הקטע AF_2 .

דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה העבירו מעגל.

נתון כי קוטר המעגל הוא $\sqrt{17}$.

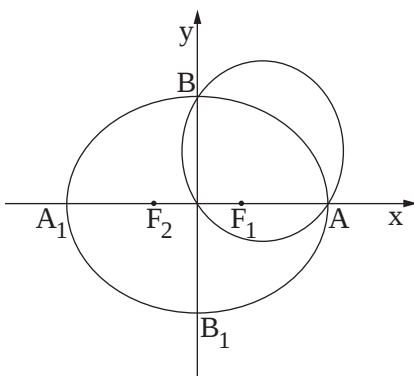
א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. העבירו עוד שלושה מעגלים אחרים דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה. המרכזים של ארבעת המעגלים הם קדקודים של מרובע.

המרובע, הנמצא במישור $[x, y]$, הוא בסיס של פירמידה שקדקודה הוא $S(0, 3, 4)$.

מצא את נפח הפירמידה.

פתרון לשאלה 1



$$I. \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

א. שיעור ה- x של המוקד F_1 הוא:

$$II. \quad c = \frac{a - c}{2}$$

לפי אמצע הקטע AF_2 :

$$III. \quad 17 = a^2 + b^2$$

לפי הנתון ש- AB הוא קוטר:

$$a^2 = 9$$

מ- I, II ו- III מקבלים:

$$b^2 = 8$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(0, 2\sqrt{2}) \quad (0, -2\sqrt{2})$$

ב. קדקודי האליפסה הם:

$$(3, 0) \quad (-3, 0)$$

לכן נוצר מלבן שקדקודיו הם אמצעי

הקטעים המחברים את קדקודי

האליפסה:

$$\left(\frac{3}{2}, \sqrt{2}\right) \quad \left(\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{2}\right) \quad \left(-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

שטח המלבן הוא:

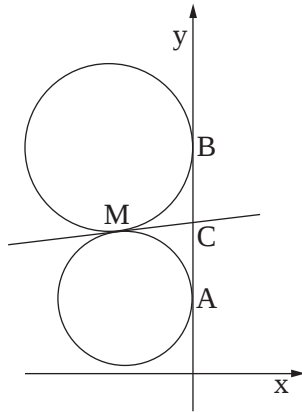
$$4$$

גובה הפירמידה הוא שיעור ה- z של הקדקוד S :

$$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

נפח הפירמידה הוא:

שאלה 2



שני מעגלים שמרכזיהם נמצאים ברביע השני,

משיקים לציר ה- y בנקודות $A(0, 1)$ ו- $B(0, 3)$.

המעגלים משיקים זה לזה בנקודה M (ראה ציור).

א. המשיק המשותף לשני המעגלים חותך את ציר ה- y בנקודה C .

$$MC = \frac{1}{2} AB$$

ב. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי של

נקודות ההשקה M הנוצרות באופן שתואר.

(2) מהי הצורה של המקום הגאומטרי של הנקודות M , ובאיזה רביע/רביעים הוא נמצא?

ג. המדריך של הפרבולה $y^2 = 2px$ משיק למקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.

מצא את השיעורים של הנקודות על הפרבולה שמרחקן מהמוקד שלה הוא 10.

פתרון לשאלה 2

$$\text{א. משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת מחוץ למעגל שווים.} \quad \begin{cases} CM = CB \\ CM = CA \end{cases}$$

$\Downarrow$

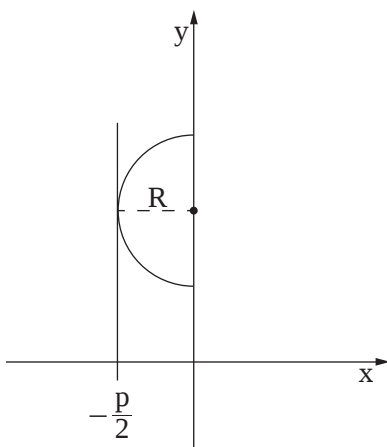
$$CM = \frac{1}{2} AB$$

ב. (1) שיעורי אמצע הקטע AB הם: $C(0, 2)$

אורך הקטע CM הוא: 1

לכן המקום הגאומטרי של הנקודות $M(x, y)$: $x^2 + (y - 2)^2 = 1 \quad (x < 0)$

(2) חצי מעגל ברביע השני (כי מרכזי המעגלים ברביע השני). (חצי המעגל לא כולל קצוות).



ג. רדיוס המקום הגאומטרי הוא: 1

לכן משוואת המדריך היא: $x = -1$

על פי ההגדרה משוואת המדריך היא: $x = -\frac{p}{2}$

מכאן שמשוואת הפרבולה היא: I. $y^2 = 4x$

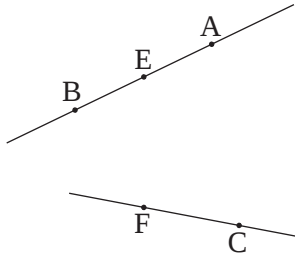
מרחק נקודה על פרבולה מהמדריך שלה

שווה למרחקה מהמוקד,

לכן שיעור ה- x של הנקודה מקיים: II. $x + 1 = 10$

מ- I ו- II מקבלים את הנקודות: $(9, 6)$ ו- $(9, -6)$

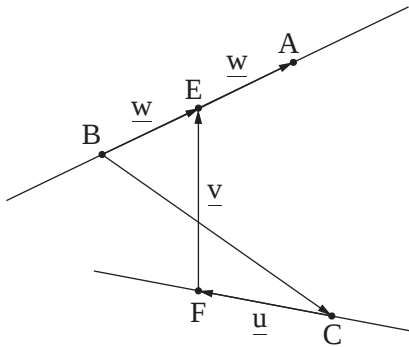
שאלה 3



נתונים שני ישרים מצטלבים. קטע AB נמצא על אחד הישרים, וקטע CF נמצא על הישר האחר. נקודה E היא אמצע הקטע AB (ראה ציור).
נסמן: $\vec{EA} = \underline{w}$, $\vec{FE} = \underline{v}$, $\vec{CF} = \underline{u}$.
נתון: $|\underline{u}| = \sqrt{7}$, $|\underline{v}| = \sqrt{13}$, $|\underline{w}| = \sqrt{5}$, $\underline{v} \perp \underline{u}$, $\underline{v} \perp \underline{w}$.
קוסינוס הזווית בין הווקטורים $\underline{w}$ ו- $\underline{u}$ הוא $\frac{\sqrt{35}}{10}$.
א. מצא את גודל הזווית ABC.

נתון גם: $A(0, 2, 3)$, $B(2, 6, 3)$. מישור π עובר דרך הנקודה B ומאונך לישר AB.
ב. מצא את משוואת המישור π .
ג. היעזר בתשובתך לסעיף א ומצא את גודל הזווית שבין הישר BC למישור π .

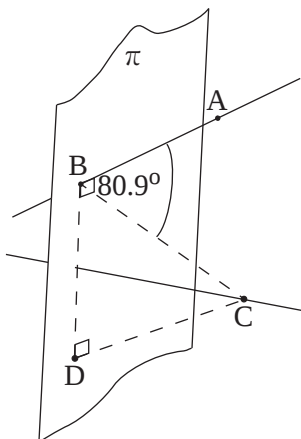
פתרון לשאלה 3



א.
 $\vec{BA} = 2\underline{w}$
 $\vec{BC} = \vec{BE} + \vec{EF} + \vec{FC} = \underline{w} - \underline{v} - \underline{u}$
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2\underline{w} \cdot (\underline{w} - \underline{v} - \underline{u}) = 3$
 $|\vec{BA}| = 2\sqrt{5}$
 $|\vec{BC}|^2 = (\underline{w} - \underline{v} - \underline{u}) \cdot (\underline{w} - \underline{v} - \underline{u}) = 18$
 $\cos \angle ABC = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{3}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{18}}$
 $\angle ABC = 80.9^\circ$

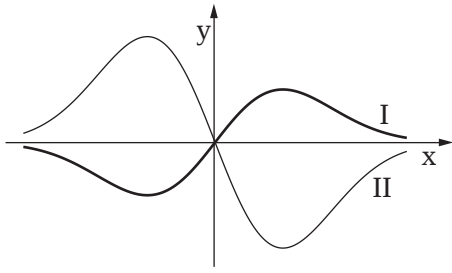
ב. הנורמל של המישור π הוא: $\vec{AB} = (2, 4, 0)$
נקודה במישור π היא: $B(2, 6, 3)$
לכן משוואת המישור π היא: $x + 2y - 14 = 0$

ג. הזווית בין הישר BC למישור π היא $\angle CBD$, כמתואר בסרטוט.



$AB \perp \pi$
 $\Downarrow$
 $AB \perp BD$
 $\Downarrow$
 $\angle CBD = 90^\circ - 80.9^\circ = 9.1^\circ$

שאלה 4



נתונות הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת $g'(x)$

מקיימות: $g'(x) = -2f(x)$.

בציור שלפניך מוצגים הגרפים I ו-II של הפונקציות $f(x)$ ו- $g'(x)$.

א. קבע איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$,

ואיזה גרף הוא של פונקציית הנגזרת $g'(x)$. נמק.

ב. נתון גם: $g'(x) = -2xe^{-x^2}$, $g(0.5) = \frac{1}{e^{0.25}}$.

מצא עבור אילו ערכים של x הגרף של הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל הגרף של הפונקציה $g(x)$.

ג. הישר ℓ_1 עובר דרך נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ ודרך נקודת המקסימום של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

הישר ℓ_2 עובר דרך נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ ודרך נקודת המינימום של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

מצא את משוואת הישר ℓ_1 , ואת משוואת הישר ℓ_2 .

ד. השטח, המוגבל על ידי הישר ℓ_1 , על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, הוא S_1 .

השטח, המוגבל על ידי הישר ℓ_2 , על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, הוא S_2 .

מהו היחס $\frac{S_1}{S_2}$? נמק.

פתרון לשאלה 4

א. נתון: $g'(x) = -2f(x)$.

לכן שיעור ה- y בערכו המוחלט של כל נקודה על גרף הפונקציה $g'(x)$ גדול פי 2

משיעור ה- y בערכו המוחלט של כל נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$.

מכאן על פי הציור הנתון: גרף I הוא של $f(x)$, גרף II הוא של $g'(x)$.

ב. $g(x) = \int -2xe^{-x^2} dx = e^{-x^2} + C$

$$g(0.5) = e^{\frac{1}{0.25}} \Rightarrow e^{\frac{1}{0.25}} = e^{-0.5^2} + C \Rightarrow C = 0$$

$\Downarrow$

$$g(x) = e^{-x^2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}g'(x) = xe^{-x^2}$$

$$f(x) > g(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$xe^{-x^2} > e^{-x^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$(e^{-x^2} > 0 \text{ כי}) \quad x > 1$$

המשך פתרון לשאלה 4

$$f(x) = xe^{-x^2} \quad \text{ג.}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g'(x) = -2f(x) \Rightarrow g''(x) = -2f'(x)$$

לכן ל- $f(x)$ ול- $g'(x)$ יש בנקודות הקיצון אותם שיעורי x , וסוגי הקיצון הפוכים.

לפי הסרטוט ל- $f(x)$ יש מינימום ב- $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

לכן משוואת ℓ_1 היא: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

משוואת ℓ_2 היא: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S_1 = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 [g'(x) - f(x)] dx = 1.5 [g(x)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \quad \text{ד.}$$

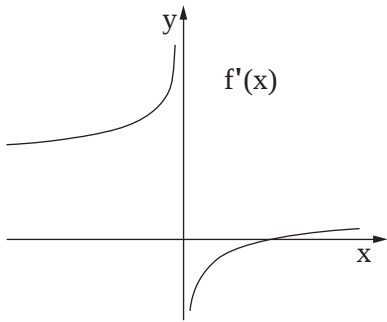
$$S_2 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [f(x) - g'(x)] dx = -1.5 [g(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.5 [g(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 1 \quad \text{לכן:}$$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 5



בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. היעזר בגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ומצא:

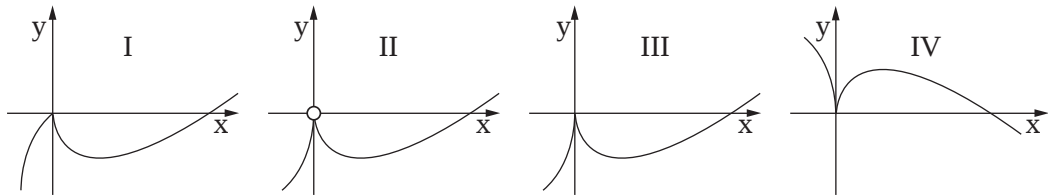
(1) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ב. נתון כי הישר $y = -1$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המינימום שלה.

מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. לפניך ארבעה גרפים IV-I. איזה גרף עשוי לתאר את הפונקציה $f(x)$? נמק.



פתרון לשאלה 5

א. (1) נקודת החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה- x : $x=1 \Leftrightarrow f'(x)=0$

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

על פי הגרף של $f'(x)$ מוצאים:

($f'(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$)

$f(x)$ עולה בתחומים: $x < 0$, $x > 1$, $f(x)$ יורדת בתחום: $0 < x < 1$

(2) על פי הגרף $f'(x)$ עולה עבור $x > 0$ והיא עולה עבור $x < 0$, לכן $f''(x)$ חיובית בתחומים אלה,

ולכן $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x > 0$, $x < 0$.

ב. על פי תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ לפונקציה יש מינימום בנקודה שבה $x=1$,

לכן שיעורי נקודת המינימום הם: I. $(1, -1)$

$$\text{II. } f(x) = \int (2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}) dx = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$$

$$f(x) = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} (2x^{\frac{1}{3}} - 3) \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

נקודות החיתוך עם הצירים:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow f(0)=0 \\ f(x)=0 \Rightarrow x_1=0 \\ x_2=3.375 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (0, 0) \\ (3.375, 0) \end{array}$$

ג. גרף III, כי: ל- $f(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x=1$, על פי תת-סעיף א (1).

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ גם עבור $x < 0$, על פי תת-סעיף א (2).

$f(x)$ מוגדרת גם עבור $x=0$, על פי הנתון.