מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ג, 2013
מספר השאלון: 316 ,035806

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	$16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות
				סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש.
כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב־ 2 קמ"ש ממהירותו של דן.
אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו־ $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.
מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v, אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ־ 25 ק"מ וגדול מ־ 9 ק"מ.

פתרון לשאלה 1

	זמן (שעות)	מהירות (קמ"ש)	דרך (ק"מ)
דן עד הפגישה	t	v	$v \cdot t$
אילנית עד הפגישה	$t-\frac{1}{2}$	$v+2$	$(v+2)(t-\frac{1}{2})$
אילנית אחרי הפגישה	$\frac{1}{2}$	$v+2$	$(v+2)\cdot\frac{1}{2}$

אורך המסלול עד הפגישה: $\text{I.}\quad v \cdot t = (v+2)(t-\frac{1}{2})$

הזמן שבו אילנית עוברת את כל המסלול: $t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=t$

לכן אורך כל המסלול הוא: $\text{II.}\quad S = t(v+2)$

על ידי פתיחת סוגריים ופישוט מקבלים מ־ I: $t=\frac{1}{4}v+\frac{1}{2}$

נציב t ב־ II ונקבל: $S=0.25v^2+v+1$

מפתרון האי־שוויונים $9<0.25v^2+v+1<25$

מקבלים: 4 קמ"ש $< v <$ 8 קמ"ש

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

א. (1) אם מכניסים אחד מהסימנים $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ למשבצת הריקה שבביטוי:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \; \square \; (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

מתקבל אי־שוויון הנכון לכל n טבעי. בחר בסימן המתאים.

(2) הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי האי־שוויון שבתת־סעיף א (1) מתקיים לכל n טבעי.

ב. נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58 , 62 , 66, ... ,(4n + 6)$

הבע את סכום הסדרה באמצעות n $(n > 12)$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פתרון לשאלה 2

א. (1) הסימן המתאים הוא: $\leq$ (ולא $<$, כי אז אי־השוויון לא מתקיים עבור $n = 1$.)

(2) בדיקה עבור $n = 1$: $1^2 \leq 1^2$

נניח כי הטענה נכונה עבור k טבעי כלשהו: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k)^2$

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $k + 1$, כלומר צ"ל:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1)^2$$

הוכחה:

מהנחת האינדוקציה נובע: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k)^2 + (k + 1)^2$

לכן מספיק להוכיח: $(1 + 2 + 3 + ... + k)^2 + (k + 1)^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1)^2$

על פי סכום של סדרה חשבונית:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k}{2}(1 + k)$$

$$1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = \frac{k + 1}{2}(2 + k)$$

לכן נותר להוכיח:

$$\frac{k^2}{4}(1 + k)^2 + (k + 1)^2 \leq \frac{(k + 1)^2}{4}(2 + k)^2$$

$$\Updownarrow$$

לאחר הצמצום בגורם החיובי $(k + 1)^2$:

$$\frac{k^2 + 4}{4} \leq \frac{(2 + k)^2}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$k^2 + 4 \leq 4 + 4k + k^2$$

לכן הטענה נכונה לכל n טבעי

/המשך בעמוד 4/

המשך פתרון לשאלה 2. א. (2)

דרך אחרת להוכחה:

נסמן: $A = 1 + 2 + ... + k$

$B = k + 1$

לכן נותר להוכיח: $A^2 + B^2 \le (A + B)^2$

$$\Updownarrow$$

$$A^2 + B^2 \le A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le 2A \cdot B$$

מאחר ש־ $A > 0$ ו־ $B > 0$ הוכחנו את מה שנותר להוכיח.

ב. לפי הנתון: $a_1 = 58$ ו־ $d = 4$

נסמן את מספר האיברים בסדרה ב־ k .

לפי הנוסחה לאיבר כללי בסדרה חשבונית: I. $a_k = 58 + 4(k - 1)$

לפי הנתון: II. $a_k = 4n + 6$

מ־ I ו־ II מקבלים: $k = n - 12$

לכן: $S_k = \frac{n - 12}{2}(2 \cdot 58 + 4(n - 13))$

$$\Downarrow$$

$$S_k = (n - 12)(32 + 2n)$$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3

בחדר I נמצאים k נשים ו־ k גברים $(k > 1)$. בחדר II נמצאים k נשים ו־ 3k גברים.

מטילים קובייה מאוזנת.

אם מתקבל מספר המתחלק ב־ 3 , בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I .

אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב־ 3 , בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II .

כאשר בוחרים באופן זה, ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II .

א. מצא את k .

ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.

ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.

מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I ?

פתרון לשאלה 3

א. ההסתברות לבחור בחדר I היא: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. ההסתברות לבחור בחדר II היא: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

מכאן:

ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I היא:
$$P\begin{pmatrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר I}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k}{2k}\cdot\frac{k-1}{2k-1}$$

וההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II היא:
$$P\begin{pmatrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר II}\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\frac{k}{4k}\cdot\frac{k-1}{4k-1}$$

לפי הנתון:
$$P\begin{pmatrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר I}\end{pmatrix} = \frac{15}{7}P\begin{pmatrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר II}\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

מפתרון המשוואה, אחרי צמצום ב־ $k-1$, מקבלים: $k = 4$

ב.
$$P(\text{2 נשים}) = P\begin{pmatrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר I}\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\text{2 נשים}\\ \text{מחדר II}\end{pmatrix}$$

$$P(\text{2 נשים}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{15} = \frac{11}{105}$$

/המשך בעמוד 6/

המשך פתרון לשאלה 3

ג.

$$P\left(\begin{array}{c}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{array} \Big/ \begin{array}{c}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{array}\right) = \frac{P\left(\begin{array}{c}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{array}\right)}{P\left(\begin{array}{c}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{array}\right)}$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{array}\right) = 1 - P(\text{2 נשים}) = 1 - \frac{11}{105}$$

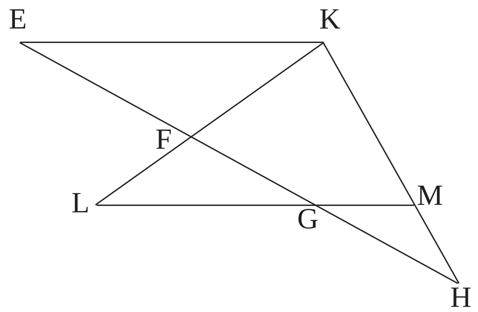
$$P\left(\begin{array}{c}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{array}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}$$

לכן:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{2 גברים}\\ \text{מחדר I}\end{array} \Big/ \begin{array}{c}\text{לפחות}\\ \text{גבר 1}\end{array}\right) = \frac{15}{188}$$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4



נתון משולש KHE . נקודות M ו־ G נמצאות על הצלעות KH ו־ EH בהתאמה כך ש־ $GM \parallel EK$.

נקודה F נמצאת על הצלע EH .

המשכי הקטעים GM ו־ FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$.

א. הוכח כי $\triangle KHE \sim \triangle FLG$.

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$, $EH = 12.5$ ס"מ , $LG = 5$ ס"מ .

(1) מצא את האורך של EK .

(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$.

פתרון לשאלה 4

א. נתון: $GM \parallel EK$

$\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$

צ"ל: $\triangle KHE \sim \triangle FLG$

<u>הוכחה:</u>

נסמן: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH = \alpha$

$\sphericalangle EKH = 180^o - \alpha$ זוויות חד־צדדיות בין מקבילים משלימות ל־ 180^o

$\sphericalangle LFG = 180^o - \alpha$ זווית צמודה ל־ $\sphericalangle KFH$

$\Downarrow$

$\sphericalangle EKH = \sphericalangle LFG$

$\sphericalangle KEH = \sphericalangle FGL$ זוויות מתחלפות בין מקבילים הן שוות

$\Downarrow$

$\triangle KHE \sim \triangle FLG$ על פי ז.ז.

/המשך בעמוד 8/

המשך פתרון לשאלה 4

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$ EH = 12.5 ס"מ LG = 5 ס"מ

(1) מהנתון נובע: $\frac{EF}{FG} = \frac{3}{2}$

לפי משפט תלס <u>או</u> לפי דמיון

במשולשים FKE ו־ FLG: $\frac{EK}{LG} = \frac{EF}{FG}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{EK}{LG} = \frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$EK = 7.5$$

(2) מהדמיון שבסעיף א נובע: $\frac{EK}{FG} = \frac{EH}{LG}$

$$\Downarrow$$

$$FG = 3$$

$$\Downarrow$$

$$EG = 7.5$$

$$\Downarrow$$

$$GH = 5$$

לפי משפט תלס <u>או</u> לפי דמיון

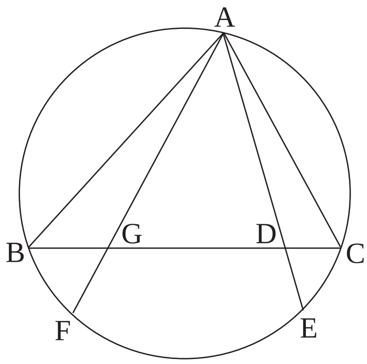
במשולשים HKE ו־ HMG: $\frac{MH}{KH} = \frac{GH}{EH}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MH}{KH} = \frac{5}{12.5} = \frac{2}{5}$$

/המשך בעמוד 9/

שאלה 5



משולש ABC חסום במעגל. המיתר AF חותך את BC בנקודה G .

המיתר AE חותך את BC בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $BF = BG$ $\quad \sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

א. הוכח כי $\triangle AGB \cong \triangle ACE$.

ב. נתון גם: $CE =$ 2 ס"מ , $AC =$ 5 ס"מ , $GC =$ 6 ס"מ .

חשב את האורך של המיתר AE .

פתרון לשאלה 5

א. נתון: $BF = BG$ $\quad \sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

צ"ל: $\triangle AGB \cong \triangle ACE$

<u>הוכחה:</u>

$BF = CE$ זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים

$\Downarrow$

$BG = CE$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC$ זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת הן שוות

$\Downarrow$

$\sphericalangle AGB = \sphericalangle ACE$ סכום זוויות במשולש הוא 180^o

$\Downarrow$

$\triangle AGB \cong \triangle ACE$ על פי ז.צ.ז

ב. נתון גם: $CE =$ 2 ס"מ $\quad AC =$ 5 ס"מ $\quad GC =$ 6 ס"מ

מהחפיפה בסעיף א נובע:

$AC = AG = 5$

$AB = AE$

במשולש שווה־שוקיים AGC מתקיים:

$\cos \sphericalangle AGC = \frac{3}{5}$

$\Downarrow$

$\cos \sphericalangle AGB = -\frac{3}{5}$

לפי משפט הקוסינוסים

במשולש ABG:

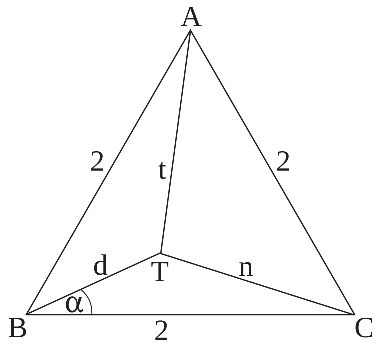
$AB^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-\frac{3}{5})$

$\Downarrow$

$AB = \sqrt{41}$ ס"מ $\quad \Rightarrow \quad AE = \sqrt{41}$ ס"מ

/המשך בעמוד 10/

שאלה 6



נתון משולש שווה־צלעות ABC .

נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle TBC = \alpha$, CT = n ס"מ , BT = d ס"מ , AT = t ס"מ .

אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.

א. הוכח כי $\sin(\alpha - 30^o) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש ATC באמצעות α ו־ d .

פתרון לשאלה 6

א. לפי משפט הקוסינוסים במשולש BTC:

$$\text{I.} \quad n^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cos\alpha$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש TBA:

$$\text{II.} \quad t^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cos(60^o - \alpha)$$

מ־ I ומ־ II מקבלים:

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \cos(60^o - \alpha) - \cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

לפי הזהות להפרש הקוסינוסים:

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = -2\sin\frac{60^o}{2}\sin\frac{60^o - 2\alpha}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \sin(\alpha - 30^o)$$

ב.

$$S_{\Delta ATC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABT} - S_{\Delta TBC}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ATC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sin 60^o - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\sin(60^o - \alpha) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d(\sin(60^o - \alpha) + \sin\alpha)$$

/המשך בעמוד 11/

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.

(1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית. נמק.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה־ x .

סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

פתרון לשאלה 7

א. (1) $f(x)$ מוגדרת לכל x (המכנה תמיד חיובי, כי הוא סכום של מספר חיובי ומספר אי־שלילי.)

(2) נקודת החיתוך עם ציר ה־ y: $(0 , \frac{2}{a^2})$. אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x .

(3) אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

אין אסימפטוטה אנכית.

(4) $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2 + 3a^2)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

עבור $x > 0$ $f'(x) < 0$

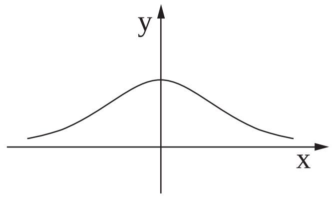
עבור $x < 0$ $f'(x) > 0$

מכאן שיש מקסימום בנקודה $(0 , \frac{2}{a^2})$

/המשך בעמוד 12/

המשך פתרון לשאלה 7

ב.



ג. מהנתון נובע: $f''(a) = f''(-a) = 0$

(1) $f''(x) > 0$ עבור $x > a$ או $x < -a$, כי בתחומים אלה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$.

$f''(x) < 0$ עבור $-a < x < a$, כי בתחום זה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$.

(2)

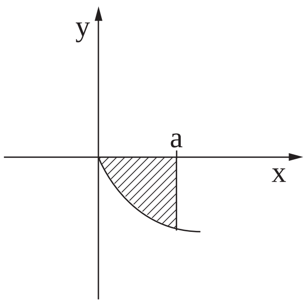
x	$x < -a$	$-a$	$-a < x < a$	a	$x > a$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	↗		↘		↗

ל־ $f'(x)$ יש מקסימום בנקודה שבה $x = -a$

ויש מינימום בנקודה שבה $x = a$

ד. על פי סעיף א(4): $f'(x)$ שלילית עבור $x > 0$ ו־ $f'(0) = 0$.

לכן השטח המבוקש S נמצא מתחת לציר ה־ x בגבולות שבין 0 ל־ a :



$$S = -\int_0^a f'(x)\,dx = -[f(x)]_0^a$$

$$S = \frac{1}{2a^2}$$

/המשך בעמוד 13/

שאלה 8

נתונה הפונקציה $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\sin x$ בקטע $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי־שוויון $\sqrt{\sin x} < \frac{1}{2}\sin x$? נמק.

פתרון לשאלה 8

א. (1) עבור כל x בקטע הנתון: $\sin x \geq 0$ ($\sqrt{\sin x}$ מוגדר רק כאשר $\sin x \geq 0$)

$$\Updownarrow$$

$0 \leq x \leq \pi$ או $2\pi \leq x \leq 3\pi$

(2) (עבור $2\pi < x < 3\pi$ או $0 < x < \pi$):

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sqrt{\sin x} - 1)}{2\sqrt{\sin x}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ $\cos x = 0$ או $\sqrt{\sin x} - 1 = 0$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} & \text{לא בתחום ההגדרה} \\ x = \frac{5\pi}{2} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5}{2}\pi \end{cases}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
f(x)	0 ↘	$-\frac{1}{2}$	0 ↗		0 ↘	$-\frac{1}{2}$	0 ↗

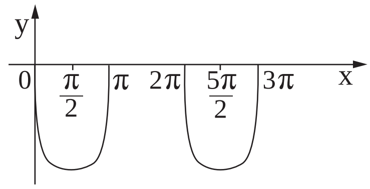
מקסימום בנקודות: $(0, 0)$ $(\pi, 0)$ $(2\pi, 0)$ $(3\pi, 0)$

מינימום בנקודות: $(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{5\pi}{2}, -\frac{1}{2})$

/המשך בעמוד 14/

המשך פתרון לשאלה 8

ב. (1)



(2) $y = -\frac{1}{2}$ (ישר העובר דרך שתי נקודות המינימום)

ג. האי־שוויון $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$ שקול ל־ $f(x) > 0$.

לכן אין ערכים שעבורם מתקיים האי־שוויון $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$, כי $f(x) \le 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

/המשך בעמוד 15/

שאלה 9

מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים) .

מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע.

סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$.

מצא את הערך של k .

פתרון לשאלה 9

היקף המעגל: $x \quad (0 \le x \le k)$

היקף הריבוע: $k - x$

סכום השטחים: $S = \pi \cdot (\frac{x}{2\pi})^2 + (\frac{k-x}{4})^2$

$$\Downarrow$$

$$S' = \frac{x(\pi+4) - \pi k}{8\pi}$$

$$S' = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{I.} \;\; x = \frac{\pi k}{\pi+4}$$

(הנקודה $\frac{\pi k}{\pi+4}$ נמצאת בקטע $[0 , k]$)

בדיקת מינימום: $S'' = \frac{\pi+4}{8\pi} > 0$

לפי הנתון: $\text{II.} \quad x = \frac{5\pi}{\pi+4}$

מ־ I ו־ II מקבלים: $k = 5$