

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מ ת מ ט י ק ה

4 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים:

פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב — $33 \frac{1}{3} \times 1$ — $33 \frac{1}{3}$ נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פונקציות טריגונומטריות,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ופונקציות חזקה — $33 \frac{1}{3} \times 2$ — $66 \frac{2}{3}$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

1. נתונות שתי סדרות, a_n ו- b_n , המוגדרות לכל n טבעי לפי הכלל: $a_{n+1} = 3a_n + 5$

$$b_n = a_n + 2.5$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה ($a_n \neq -2.5$).

נתון גם כי $b_1 = 2$.

ב. הבע באמצעות a_n את b_n .

ג. (1) הבע באמצעות n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n .

(2) הבע באמצעות n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

פתרון לשאלה 1

א. נתון: $a_{n+1} = 3a_n + 5$ ו- $b_n = a_n + 2.5$

$$\Downarrow$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 2.5 = 3a_n + 7.5$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3(a_n + 2.5)}{a_n + 2.5} = 3$$

המנה היא ערך קבוע, לכן הסדרה היא הנדסית.

ב. לפי הנתון: $a_n = b_n - 2.5$, $b_1 = 2$

לפי סעיף א המנה של b_n היא 3, לכן:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2.5 \quad \text{מכאן:}$$

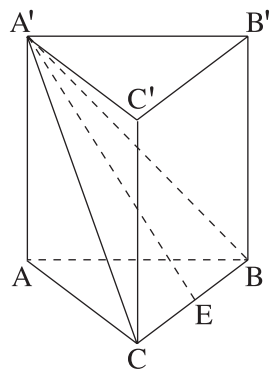
ג. (1) על פי הנוסחה לסכום n איברים בסדרה הנדסית, הסכום של n איברים בסדרה b_n הוא:

$$S_I = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

(2) הסכום של n איברים בסדרה שכל אחד מאיבריה הוא -2.5 : $S_{II} = -2.5n$

לכן הסכום של הסדרה $a_n = b_n - 2.5$ הוא: $S_I + S_{II} = 3^n - 1 - 2.5n$

שאלה 2



- נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, שבסיסה הם משולשים שוויו-צלעות (ראה ציור).
 $A'E$ הוא הגובה ל- BC במשולש $A'BC$.
 הזווית בין $A'E$ ובין מישור הבסיס ABC היא α .
 גובה המנסרה הוא h .
 א. הבע באמצעות h ו- α את אורך צלע הבסיס של המנסרה.
 ב. אם נתון כי $\alpha = 30^\circ$, מצא את גודל הזווית שבין $A'C$ למישור ABC .

פתרון לשאלה 2

א. לפי הנתון: $A'E \perp BC$

$A'E$ הוא גובה לבסיס

במשולש שווה-שוקיים $A'BC$,

לכן E אמצע BC ,

ומכאן במשולש שווה-צלעות ABC : $AE \perp BC$

לכן: $\angle A'EA = \alpha$

$$\text{I. } \frac{h}{AE} = \tan \alpha$$

נסמן: a — אורך צלע הבסיס

$$\text{II. } \frac{AE}{a} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{3} \tan \alpha} \quad \text{מ- I ומ- II מקבלים:}$$

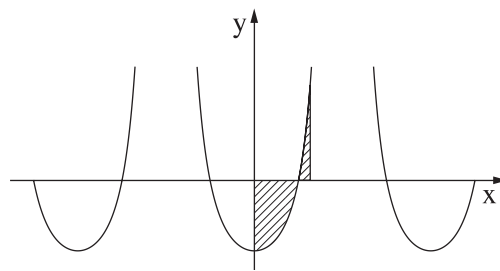
ב. AA' מאונך למישור ABC , לכן הזווית המבוקשת היא $\angle A'CA$.

$$\tan (\angle A'CA) = \frac{h}{a} = h \cdot \frac{\sqrt{3} \tan \alpha}{2h} = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$\angle A'CA = 26.56^\circ$$

שאלה 3



נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2$

בקטע $-\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ (ראה ציור).

א. בקטע הנתון מצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה

ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y .

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

פתרון לשאלה 3

א. (1) המכנה מתאפס כאשר: $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה: $x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq -\frac{\pi}{2}$

אסימפטוטות: $x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$

(2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Updownarrow$

$\Updownarrow$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} \quad x = \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$k = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{4}$$

$$S = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = - [\tan x - 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\tan x - 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \quad \text{ב.}$$

$$S = \frac{\pi}{2} - 1 + (\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}) - (1 - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - 2 = 0.779$$

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = \log_2(-x^2 + 4x + 32)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
בתשובתך השאר, במידת הצורך, שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לציר ה- x .
בתשובתך תוכל להשאיר $\log$ או תוכל להשאיר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פתרון לשאלה 4

א. תחום ההגדרה: $-x^2 + 4x + 32 > 0$



$$-4 < x < 8$$

ב. $x = 0 \Rightarrow f(0) = \log_2(32) = 5$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 32 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{35}$$

לכן נקודות החיתוך עם הצירים הן: $(0, 5)$, $(-3.92, 0)$, $(7.92, 0)$

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{(-x^2 + 4x + 32) \cdot \ln 2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-4 < x < 2$	2	$2 < x < 8$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

עלייה: $-4 < x < 2$

ירידה: $2 < x < 8$

ד. הישר משיק בנקודת הקיצון של הפונקציה שבה $x = 2$, לכן: $f(2) = \log_2 36 \Rightarrow y = \log_2 36 = 5.17$

שאלה 5

- א. ב- 1/1/2000 מנתה אוכלוסיית מדינה מסוימת 2.5 מיליון תושבים.
מספר התושבים גדל בצורה מעריכית, ועד 1/1/2010 גדלה האוכלוסייה ב- 63%.
כעבור כמה שנים מ- 1/1/2000 יהיה מספר התושבים במדינה 8 מיליון?
- ב. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2 - m} - e^{m - x^2}$. m הוא פרמטר.
(1) הבע באמצעות m (במידת הצורך) את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
(2) נתון כי הישר $y = 0$ משיק לגרף הפונקציה.
מצא את הערך של m .
הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פתרון לשאלה 5

$$M_t = M_0 \cdot q^t \quad \text{א.}$$

$$2.5 \times 1.63 = 2.5 \times q^{10} \Rightarrow q = 1.63^{\frac{1}{10}} \quad \text{כעבור 10 שנים:}$$

$$8 = 2.5 \times q^t = 2.5 \cdot 1.63^{\frac{t}{10}} \quad \text{כעבור } t \text{ שנים:}$$

$$\Downarrow$$

$$t = 23.8 \text{ שנים}$$

$$f'(x) = 2x(e^{x^2 - m} + e^{m - x^2}) \quad \text{ב. (1)}$$

$$(0 < e^{x^2 - m} + e^{m - x^2} \text{ כי}) \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = e^{-m} - e^m$$

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

מינימום ב- $(0, e^{-m} - e^m)$

$$(2) \quad \text{שיפוע הישר } y = 0 \text{ הוא אפס, לכן הוא משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה הנגזרת שווה לאפס, } (0, e^{-m} - e^m).$$

$$e^{-m} - e^m = 0 \quad \text{מכאן:}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-m} = e^m$$

$$\Downarrow$$

$$m = 0$$