

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ג, 2013
מספר השאלון: 313, 035803
נספח: דפי נוסחאות ל-3 יחידות לימוד

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שש שאלות בנושאים:

אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

עליך לענות על ארבע שאלות — $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

בעל פיצרייה קנה 5 ק"ג גבינה צהובה ו- 10 ק"ג קמח.

ידוע כי מחיר 1 ק"ג גבינה צהובה גבוה ב- 50 שקלים ממחיר 1 ק"ג קמח.

בעל הפיצרייה קיבל הנחה של 20% על כל 1 ק"ג גבינה צהובה, והנחה של 25% על כל

1 ק"ג קמח.

לאחר ההנחה שילם בעל הפיצרייה בעבור הקנייה 315 שקלים.

א. מה היה המחיר של 1 ק"ג גבינה צהובה, ומה היה המחיר של 1 ק"ג קמח לפני ההנחה?

ב. ידוע כי כל פיצה נמכרת במחיר זהה, ולהכנתה יש צורך ב- 250 גרם גבינה צהובה ו- 500 גרם קמח.

בעל הפיצרייה מעוניין לנצל את כל הרכיבים שקנה.

מצא כמה פיצות עליו לייצר. פרט את חישוביך.

פתרון לשאלה 1

א. נסמן ב- x את המחיר של 1 ק"ג קמח לפני ההנחה. על סמך הנתונים נבנה טבלה זו:

מחיר לפני ההנחה	מחיר אחרי ההנחה	
x	$0.75x$	1 ק"ג קמח
$x + 50$	$0.8(x + 50)$	1 ק"ג גבינה צהובה

כמו כן, נתון כי לאחר ההנחה שילם בעל הפיצרייה בעבור הקנייה 315 שקלים

(הוא קנה 5 ק"ג גבינה צהובה ו- 10 ק"ג קמח).

↓

$$5 \cdot [0.8(x + 50)] + 10 \cdot 0.75x = 315$$

↓

$$x = 10 \text{ שקלים}$$

↓

מחיר 1 ק"ג גבינה צהובה הוא 60 שקלים.

ב. נמיר גרמים לק"ג, ונבדוק לכמה פיצות מספיק כל אחד מהרכיבים.

$$\frac{5}{0.25} = 20 \text{ מספר הפיצות לפי כמות הגבינה הצהובה:}$$

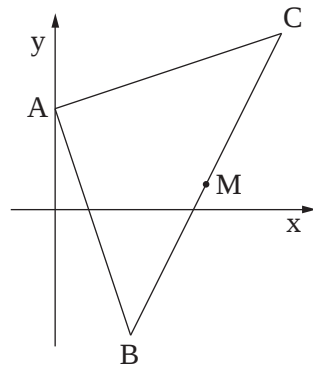
$$\frac{10}{0.5} = 20 \text{ מספר הפיצות לפי כמות הקמח:}$$

↓

בעל הפיצרייה צריך לייצר 20 פיצות

שאלה 2

בציור שלפניך נתון:

ונקודה $C(9, 7)$, $B(3, -5)$ נמצאת על ציר ה- y .משוואת הישר שעליו מונחת הצלע AB היא $y = mx + 4$ (m הוא פרמטר).א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A .(2) מצא את m .ב. הוכח כי משולש BAC הוא ישר-זווית.ג. נקודה M היא אמצע הצלע BC .נתונה נקודה D ברביע הראשון (שאינה מופיעה בציור)כך שהמרובע $AMDC$ הוא מקבילית ($AM \parallel CD$ ו- $AC \parallel MD$).מצא את שיעורי הנקודה D . פרט את חישוביך.

פתרון לשאלה 2

א. (1) A נמצאת על ציר ה- y $\Downarrow$

$$x_A = 0$$

$$y_A = m \cdot x_A + 4$$

 $\Downarrow$

$$y_A = 4$$

$$A(0, 4)$$

(2) $B(3, -5)$ נמצאת על הישר $y = mx + 4$ $\Downarrow$

$$-5 = 3m + 4$$

 $\Downarrow$

$$m = -3$$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - (-5)}{0 - 3} = -3 \quad \text{או}$$

ב. שיפוע AB הוא -3 . נמצא את שיפוע AC לפי $A(0, 4)$ ו- $C(9, 7)$

$$m_{AC} = \frac{7 - 4}{9 - 0} = \frac{1}{3}$$

 $\Downarrow$

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

 $\Downarrow$

$$\angle BAC = 90^\circ \quad (\text{התנאי לניצבות מתקיים})$$

המשך הפתרון של שאלה 2.

ג. נמצא את שיעורי נקודה M לפי אמצע הקטע שקצותיו B(3, -5) ו-C(9, 7).

↓

$$x_M = \frac{9+3}{2}, y_M = \frac{7-5}{2}$$

↓

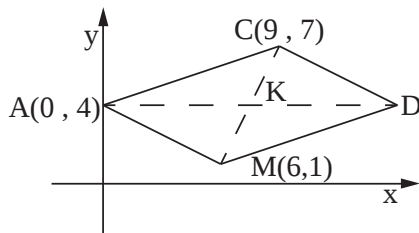
$$M(6, 1)$$

מכאן יש דרכי פתרון רבות, נציין שתיים מהן:

דרכ'א': נסמן ב-K את מפגש האלכסונים במקבילית AMDC.

באותו אופן נמצא את שיעורי הנקודה K לפי אמצע הקטע

שקצותיו C(9, 7) ו-M(6, 1).



↓

$$K(7.5, 4)$$

נמצא את שיעורי נקודת הקצה D בעזרת אמצע הקטע AD [הנקודה K(7.5, 4)], ונקודת הקצה A(0, 4).

↓

$$\frac{x_D + 0}{2} = 7.5, \frac{y_D + 4}{2} = 4$$

$$D(15, 4)$$

דרכ'ב':

D היא נקודת החיתוך של הישרים MD ו-CD. נמצא את משוואותיהם.

$$(AC \parallel MD) \quad m_{MD} = \frac{1}{3}, \quad m_{AC} = \frac{1}{3}$$

הישר MD עובר דרך הנקודה M(6, 1) $\Leftrightarrow$ משוואת הישר MD $y = \frac{1}{3}x - 1$.

$$m_{AM} = \frac{1-4}{6-0} = -\frac{1}{2}$$

$$(AM \parallel CD) \quad m_{AM} = m_{CD}$$

באופן דומה נקבל כי משוואת הישר CD: $y = -\frac{1}{2}x + 11.5$

נמצא את נקודת החיתוך של שני הישרים (הנקודה D)

$$-\frac{1}{2}x + 11.5 = \frac{1}{3}x - 1$$

↓

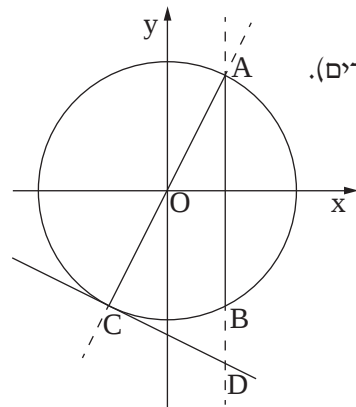
$$x = 15$$

↓

$$y_D = \frac{1}{3} \cdot 15 - 1 = 4$$

$$D(15, 4)$$

שאלה 3



בציור שלפניך נתון המעגל $x^2 + y^2 = 125$ (O – ראשית הצירים).

A ו-B הן נקודות החיתוך של המעגל עם הישר $x = 5$.

AC הוא קוטר במעגל.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח קוטר המעגל, AC.

ג. מעבירים משיק למעגל בנקודה C.

מצא את משוואת המשיק.

ד. ההמשך של הקטע AB חותך את המשיק בנקודה D.

מצא את שיעורי הנקודה D.

פתרון שאלה 3

א. למציאת נקודות החיתוך A ו-B נציב $x = 5$ במשוואת המעגל $x^2 + y^2 = 125$ $\Leftrightarrow A(5, 10), B(5, -10)$

ב. נמצא את השיפוע ואת משוואת הישר לפי הנקודות A(5, 10) ו-O(0, 0) שעל הישר.

$\Downarrow$

$$m_{AO} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{10 - 0}{5 - 0} = 2$$

משוואת ישר העובר דרך הראשית היא $y = mx$

$\Downarrow$

$$y = 2x$$

ג. O(0, 0) היא אמצע הקטע AC. נמצא את שיעורי נקודה C לפי שיעורי הנקודות A(5, 10) ו-O(0, 0).

$$\frac{x_C + x_A}{2} = 0, \quad \frac{y_C + y_A}{2} = 0$$

$$C(-5, -10) \quad \Leftrightarrow \quad A(5, 10) \quad \text{נציב}$$

$$m_{\text{משיק}} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot m_{\text{משיק}} = -1 \quad \text{מתנאי ניצבות של המשיק והרדיוס}$$

מכאן נמצא את משוואת המשיק לפי השיפוע ולפי הנקודה C(-5, -10)

$\Downarrow$

$$CD: y = -\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$$

$$y_D = -\frac{1}{2} \cdot 5 - 12\frac{1}{2} = -15 \quad \Leftrightarrow \quad x_D = 5 \quad \text{נציב במשוואת המשיק את } x_D = x_B \quad \text{ד.}$$

$$D(5, -15)$$

שאלה 4

נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
 ה. נתון כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(2.52, 0)$.
 היעזר בנתון זה ובתשובותיך לסעיפים א-ד וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון שאלה 4

א. תחום ההגדרה הוא $x \geq 0$.

ב. $y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

$y' = 0$ בנקודות קיצון

$$x = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ נעלה את שני האגפים בריבוע}$$

$y = -3$ ולכן $(1, -3)$ היא נקודה חשודה לקיצון.

נבדוק את סוגה:

x	$\frac{1}{4}$	1	4
y'	$-3\frac{1}{2}$	0	7
y	$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

$(1, -3) \text{ Min}$

x	0	1	4
y	0	-3	8

או לפי שיעור y :

$0 < x < 1$

$1 < x$

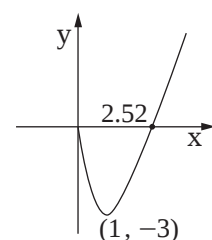
ג. תחום ירידה:

תחום עלייה:

$(0, 0)$

ד. $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ה.



שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = -4x^3 + 6x^2$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה A (אינה ראשית הצירים).

מצא את שיעורי הנקודה A .

ג. משוואת הישר העובר דרך נקודת המקסימום של הפונקציה

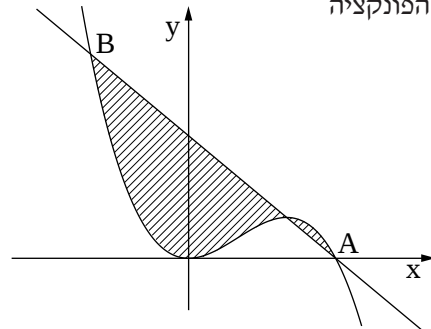
ודרך הנקודה A היא $y = -4x + 6$.

הישר חותך את גרף הפונקציה

בנקודה $B(-1, 10)$ (ראה ציור).

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

ועל ידי הישר AB (השטח המקווקו בציור).



פתרון שאלה 5

א. $f'(x) = -12x^2 + 12x$

$$12x(-x+1) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ בנקודות קיצון}$$

$$x_2 = 1, x_1 = 0 \Leftrightarrow$$

↓

$$\text{לכן } (0, 0) \text{ ו- } (1, 2) \text{ הן נקודות חשודות לקיצון.}$$

נבדוק את סוג הקיצון:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	-24	0	3	0	-24
$f(x)$	↘		↗		↘

↓

$(1, 2) \text{ Max}, (0, 0) \text{ Min}$

ב. $A(1.5, 0) \Leftrightarrow x = 0, x = 1.5 \Leftrightarrow x^2(-4x+6) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

ג. נשים לב כי בתחום בין x_B לבין $x_2 = 1$ (נקודת המקסימום) הישר הוא מעל לפונקציה, ובתחום בין x_2 לבין x_A

הפונקציה היא מעל לישר.

נחבר את שני חלקי השטח ונקבל:

$$S = \int_{-1}^1 [-4x + 6 - (-4x^3 + 6x^2)] dx + \int_1^{1.5} [-4x^3 + 6x^2 - (-4x + 6)] dx$$

↓

$$S = (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x) \Big|_{-1}^1 + (-x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x) \Big|_1^{1.5}$$

↓

$$S = 8\frac{3}{16}$$

/המשך בעמוד 8/

שאלה 6

א. מבין כל זוגות המספרים החיוביים x ו- z המקיימים $x \cdot z = 48$, מצא את

זוג המספרים שעבורם הסכום $x + 3z$ הוא מינימלי.

ב. מהו הסכום המינימלי?

פתרון שאלה 6

א. נביע את הסכום בעזרת x ($x > 0$): $x \cdot z = 48 \Leftrightarrow z = \frac{48}{x} \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{3 \cdot 48}{x}$ פונקציה המתארת את הסכום

כדי למצוא את המינימום נגזור את

פונקציית הסכום ונשווה ל-0:

$$1 - \frac{144}{x^2} = 0, f'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$$

$\Downarrow$

$$x = \pm 12$$

נתון $x > 0 \Leftrightarrow$ נבדוק רק את $x = 12$:

x	4	12	16
$f'(x)$	-8	0	0.4375
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

$$z = \frac{48}{12} = 4$$

ב. $f(12) = 24$ הסכום המינימלי