

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה שאלון ו'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה	—	$33\frac{1}{3} \times 1$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי,				
		טריגונומטריה		$33\frac{1}{3} \times 2$	—	$\frac{2}{3}$ נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החשובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש.
 כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב-2 קמ"ש ממהירותו של דן.
 אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו- $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.
 מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v , אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ-25 ק"מ וגדול מ-9 ק"מ.

פתרון לשאלה 1

זמן (שעות)	מהירות (קמ"ש)	דרך (ק"מ)
דן עד הפגישה	v	$v \cdot t$
אילנית עד הפגישה	$v + 2$	$(v + 2)(t - \frac{1}{2})$
אילנית אחרי הפגישה	$v + 2$	$(v + 2) \cdot \frac{1}{2}$

I. $v \cdot t = (v + 2)(t - \frac{1}{2})$ אורך המסלול עד הפגישה:

$t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = t$ הזמן שבו אילנית עוברת את כל המסלול:

II. $S = t(v + 2)$ לכן אורך כל המסלול הוא:

$t = \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}$ על ידי פתיחת סוגריים ופישוט מקבלים מ-I:

$S = 0.25v^2 + v + 1$ נציב t ב-II ונקבל:

$9 < 0.25v^2 + v + 1 < 25$ מפתרון האי-שוויונים

$8 \text{ קמ"ש} < v < 4 \text{ קמ"ש}$ מקבלים:

שאלה 2

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי גדול מ-2 מתקיים:

$$(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \dots \cdot 2n < 3^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

ב. הוכח כי עבור כל n טבעי מתקיים: $\frac{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+6) \cdot \dots \cdot (2n+6)}{3^{n+2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+5)} < 1$

פתרון לשאלה 2

א. בדיקה עבור $n = 3$: $(3+1) \cdot (3+2) \cdot (3+3) = 120$

$$\Rightarrow 120 < 135$$

$$3^{3-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 135$$

נניח כי הטענה נכונה עבור $k > 2$ טבעי כלשהו:

$$(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot \dots \cdot 2k < 3^{k-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$$

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $k+1$, כלומר צ"ל:

$$(k+2) \cdot (k+3) \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) < 3^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)$$

הוכחה:

$$(k+2) \cdot (k+3) \cdot \dots \cdot 2k < \frac{3^{k-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{k+1}$$

מהנחת האינדוקציה נובע:

לכן מספיק להוכיח:

$$\frac{3^{k-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{k+1} \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) < 3^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{(2k+2)}{k+1} < 3 \quad ; \quad 3^{k-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)$$

לאחר הצמצום ב-

$\Leftrightarrow$

$$2 < 3 \quad ; \quad \text{לאחר הצמצום ב- } k+1$$

לכן הטענה נכונה לכל n טבעי גדול מ-2.

ב. על פי סעיף א עבור כל $n > 2$ מתקיים:

$$\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \dots \cdot 2n}{3^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} < 1$$

לכן הטענה נכונה גם אם מציבים במקום n את המספר $n+3$ ($n+3 > 2$ תמיד).

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.

(1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית,

ואת התחום שבו היא שלילית. נמק.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- x .

סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

פתרון לשאלה 3

א. (1) $f(x)$ מוגדרת לכל x (המכנה תמיד חיובי, כי הוא סכום של מספר חיובי ומספר אי-שלילי).

(2) נקודת החיתוך עם ציר ה- y : $(0, \frac{2}{a^2})$. אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

(3) אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

אין אסימפטוטה אנכית.

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2 + 3a^2)^2} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (4)$$

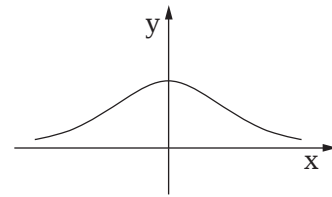
$$f'(x) < 0 \quad x > 0 \quad \text{עבור}$$

$$f'(x) > 0 \quad x < 0 \quad \text{עבור}$$

$$(0, \frac{2}{a^2}) \quad \text{מכאן שיש מקסימום בנקודה}$$

המשך פתרון לשאלה 3

ב.



ג. מהנתון נובע: $f''(a) = f''(-a) = 0$

(1) $f''(x) > 0$ עבור $x > a$ או $x < -a$, כי בתחומים אלה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$.

$f''(x) < 0$ עבור $-a < x < a$, כי בתחום זה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$.

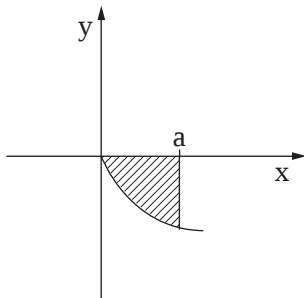
x	$x < -a$	$-a$	$-a < x < a$	a	$x > a$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ל- $f'(x)$ יש מקסימום בנקודה שבה $x = -a$

ויש מינימום בנקודה שבה $x = a$

ד. על פי סעיף א(4): $f'(x)$ שלילית עבור $x > 0$ ו- $f'(0) = 0$.

לכן השטח המבוקש S נמצא מתחת לציר ה- x בגבולות שבין 0 ל- a :



$$S = - \int_0^a f'(x) dx = - [f(x)]_0^a$$

$$S = \frac{1}{2a^2}$$

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} \sin x$ בקטע $0 \leq x \leq 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי־שוויון $\frac{1}{2} \sin x > \sqrt{\sin x}$? נמק.

פתרון לשאלה 4

א. (1) עבור כל x בקטע הנתון: $\sin x \geq 0$ ($\sqrt{\sin x}$ מוגדר רק כאשר $\sin x \geq 0$)

$\Leftrightarrow$

$$0 \leq x \leq \pi \quad \text{או} \quad 2\pi \leq x \leq 3\pi$$

(2) (עבור $0 < x < \pi$ או $2\pi < x < 3\pi$): $f'(x) = \frac{\cos x (\sqrt{\sin x} - 1)}{2\sqrt{\sin x}}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\sin x} - 1 = 0 \quad \text{או} \quad \cos x = 0$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{2} \end{cases} \quad \text{לא בתחום ההגדרה}$$

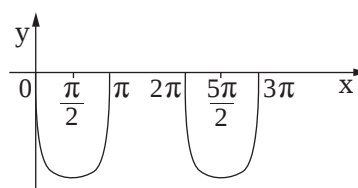
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	0		0	$-\frac{1}{2}$	0
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

מקסימום בנקודות: $(0, 0)$ $(\pi, 0)$ $(2\pi, 0)$ $(3\pi, 0)$

מינימום בנקודות: $(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{5\pi}{2}, -\frac{1}{2})$

המשך פתרון לשאלה 4

ב. (1)



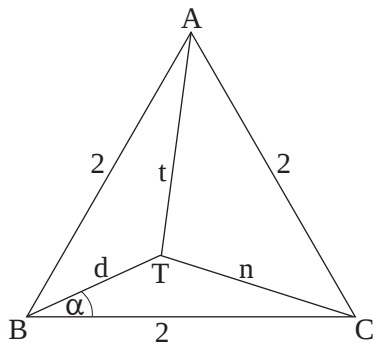
(2) $y = -\frac{1}{2}$ (ישר העובר דרך שתי נקודות המינימום)

ג. האי־שוויון $\frac{1}{2} \sin x > \sqrt{\sin x}$ שקול ל- $f(x) > 0$.

לכן אין ערכים שעבורם מתקיים האי־שוויון $\frac{1}{2} \sin x > \sqrt{\sin x}$, כי $f(x) \leq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

/המשך בעמוד 8/

שאלה 5



נתון משולש שווה-צלעות ABC.

נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).

נתון: $\angle TBC = \alpha$, $AT = t$ ס"מ, $BT = d$ ס"מ, $CT = n$ ס"מ.

אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.

א. הוכח כי $\sin(\alpha - 30^\circ) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש ATC באמצעות α ו- d.

פתרון לשאלה 5

א. לפי משפט הקוסינוסים במשולש BTC:

$$I. \quad n^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cos \alpha$$

לפי משפט הקוסינוסים במשולש TBA:

$$II. \quad t^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cos(60^\circ - \alpha)$$

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \cos(60^\circ - \alpha) - \cos \alpha$$

מ-I ומ-II מקבלים:

↓

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = -2 \sin \frac{60^\circ}{2} \sin \frac{60^\circ - 2\alpha}{2}$$

לפי הזהות להפרש הקוסינוסים:

↓

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \sin(\alpha - 30^\circ)$$

ב.

$$S_{\Delta ATC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABT} - S_{\Delta TBC}$$

↓

$$S_{\Delta ATC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d \sin(60^\circ - \alpha) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d \sin \alpha$$

↓

$$S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d(\sin(60^\circ - \alpha) + \sin \alpha)$$