

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה שאלון ה'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה	—	$33\frac{1}{3} \times 1$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	הנדסת המישור והסתברות	—	$33\frac{1}{3} \times 2$	—	$66\frac{2}{3}$ נקודות
				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1

- נתונה משוואת הישר $y = mx + 4 - 3m$. m הוא פרמטר.
- א. מצא עבור איזה ערך של m הישר עובר דרך ראשית הצירים.
- ב. מצא עבור אילו ערכים של m הישר חותך את ציר ה- x בחלקו השלילי.
- ג. ישר, המקיים את המשוואה הנתונה, מקביל לציר ה- x .
- (1) מצא את המשוואה של ישר זה.
- (2) מצא עבור אילו ערכים של x , יהיה ישר זה מתחת לישר שבסעיף א.
- ד. כל הישרים שמקיימים את המשוואה הנתונה (עבור ערכים שונים של m) עוברים דרך אותה נקודה A .
- מצא את השיעורים של נקודה A .

פתרון לשאלה 1

- א. הישר עובר דרך הנקודה $(0, 0)$, לכן: $0 = m \cdot 0 + 4 - 3m$

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{4}{3}$$

- ב. בנקודת החיתוך של הישר

$$0 = mx + 4 - 3m \quad \text{עם ציר ה-} x \text{ מתקיים:}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{3m - 4}{m}$$

שיעור ה- x של נקודת החיתוך

(בתנאי ש- $m \neq 0$) הוא:

$$x < 0 \quad \text{לפי הדרישה צריך להתקיים:}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3m - 4}{m} < 0$$

$$0 < m < \frac{4}{3} \quad \text{מפתרון האי-שוויון מקבלים:}$$

(אם $m = 0$ אז $y = 4$, ואין חיתוך עם ציר ה- x .)

המשך פתרון לשאלה 1.

ג. (1) שיפוע ישר המקביל

לציר ה־x הוא 0, לכן:

$$m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = 0 \cdot x + 4 - 3 \cdot 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = 4$$

משוואת הישר היא:

(2) מצאנו כי עבור הישר שבסעיף א

לכן משוואת הישר היא: $m = \frac{4}{3}$

$$y = \frac{4}{3}x$$

לפי הדרישה צריך להתקיים:

$$4 < \frac{4}{3}x$$

$$\Updownarrow$$

$$x > 3$$

ד. כדי לקבל שני ישרים המקיימים את המשוואה הנתונה נבחר בשני ערכים שונים כלשהם של m.

למשל נבחר: $m = 0$, $m = \frac{4}{3}$ ונקבל שני ישרים (ראה פתרון סעיף ג): $y = 4$, $y = \frac{4}{3}x$

נקודת הפגישה של שני ישרים אלה היא: (3, 4)

לכן שיעורי הנקודה A הם: A(3, 4)

שאלה 2

- נתונה סדרה חשבונית שההפרש שלה d , והאיבר הראשון שלה הוא a_1 .
- סכום 21 האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.
- א. מצא את הערך של $a_1 + 20d$.
- ב. נתון כי a_1 הוא שלילי. קבע אם הסדרה עולה או יורדת. נמק.
- ג. לכל איבר בסדרה הנתונה הוסיפו את המספר המציין את מקומו בסדרה (לאיבר הראשון הוסיפו 1, לאיבר השני הוסיפו 2 וכן הלאה). כך נוצרה סדרה חדשה. הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה החדשה גדול ב־ 861 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה.
- (1) חשב את n .
- (2) היעזר בתשובתך לסעיף א, ומצא את סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה.

פתרון לשאלה 2

א. דרך I

סכום 21 האיברים הראשונים יכול להיות

שווה לסכום 20 האיברים הראשונים

$$\text{רק אם מתקיים: } \text{I. } a_{21} = 0$$

לפי הנוסחה לאיבר כללי

$$\text{בסדרה חשבונית: } \text{II. } a_{21} = a_1 + d(21 - 1)$$

$$\text{מ־ I ו־ II מקבלים: } a_1 + 20d = 0$$

דרך II

לפי הנוסחה לסכום איברים

$$\text{בסדרה חשבונית: } S_{21} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d)$$

$$\text{לפי הנתון: } S_{21} = S_{20}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{21}{2}(2a_1 + 20d) = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_1 + 20d = 0$$

המשך פתרון לשאלה 2.

$$a_1 + 20d = 0 \quad \text{ב. לפי סעיף א:}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{I. } d = -\frac{a_1}{20}$$

$$\text{II. } a_1 < 0 \quad \text{נתון:}$$

$$d > 0 \quad \text{מ- I ומ- II מקבלים:}$$

לכן הסדרה עולה.

ג. (1) נסמן: S_n הוא סכום n האיברים בסדרה הנתונה. $S_{n(\text{חדשה})}$ הוא סכום n האיברים בסדרה החדשה.

$$a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3, \dots, a_n + n \quad \text{איברי הסדרה החדשה הם:}$$

לכן סכום איברי הסדרה החדשה הוא

$$S_{n(\text{חדשה})} = S_n + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \quad \text{סכום של שתי סדרות חשבוניות:}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{n(\text{חדשה})} = S_n + \frac{n}{2}(1 + n)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{I. } S_{n(\text{חדשה})} - S_n = \frac{n}{2}(1 + n)$$

$$\text{II. } S_{n(\text{חדשה})} - S_n = 861 \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$n = 41 \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

(2) לפי הנוסחה לסכום איברים

$$S_{41} = \frac{41}{2} (2a_1 + 40d) \quad \text{בסדרה חשבונית:}$$

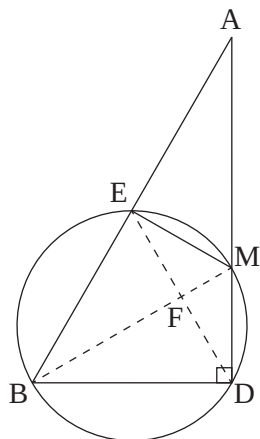
$$\Downarrow$$

$$\text{I. } S_{41} = 41(a_1 + 20d)$$

$$\text{II. } a_1 + 20d = 0 \quad \text{מצאנו:}$$

$$S_{41} = 0 \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

שאלה 3



נתון משולש ישר-זווית ABD ($\angle ADB = 90^\circ$).

נקודה E נמצאת על היתר AB

ונקודה M נמצאת על הניצב AD.

המרובע EMDB חסום במעגל.

אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F (ראה ציור).

נתון: $FM = 3$ ס"מ, $BF = 9$ ס"מ, $EM = 6$ ס"מ.

א. (1) הוכח כי קוטר המעגל החוסם את המרובע EMDB

הוא $2 \cdot EM$.

(2) מהו גודל הזווית ההיקפית החדה הנשענת על המיתר EM? נמק.

ב. נתון גם כי אלכסוני המרובע EMDB מאונכים זה לזה.

(1) הוכח כי $\angle EBM = \angle MBD$.

(2) הוכח כי $AM = 2 \cdot MD$.

פתרון לשאלה 3

א. (1) קוטר המעגל הוא: BM
הזווית ההיקפית MDB הנשענת על BM היא של 90°

$$BM = 9 + 3 = 12 \quad \text{לפי הנתון:}$$

$$EM = 6$$

$$BM = 2 \cdot EM \quad \text{לכן:}$$

$$\angle BEM = 90^\circ \quad \text{(2) זווית היקפית הנשענת על קוטר}$$

$$EM = \frac{1}{2} BM \quad \text{לפי א (1):}$$

$$\angle EBM = 30^\circ \quad \text{לכן: אם במשולש ישר-זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה נמצאת זווית של } 30^\circ.$$

המשך פתרון לשאלה 3.

ב. (1) לפי א (2): $\angle EBM = 30^\circ$

$$\angle EDM = \angle EBM = 30^\circ$$

לפי הנתון: $\angle MFD = 90^\circ$

לכן: $\angle FMD = 60^\circ$

$$\angle MBD = 180^\circ - \angle MDB - \angle FMD = 30^\circ$$

מכאן: $\angle EBM = \angle MBD$

(2) לפי ב (1): $\angle EBM = \angle MBD$



$$EM = MD = 6 \text{ ס"מ}$$

לפי ב (1): $\angle ABD = 60^\circ$



$$\angle BAD = 30^\circ$$



$$\angle BAM = \angle ABM$$



$$BM = AM = 12 \text{ ס"מ}$$

מצאנו: $MD = 6 \text{ ס"מ}$

מכאן: $AM = 2 \cdot MD$

זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר מאותו צד הן שוות

סכום זוויות במשולש הוא 180°

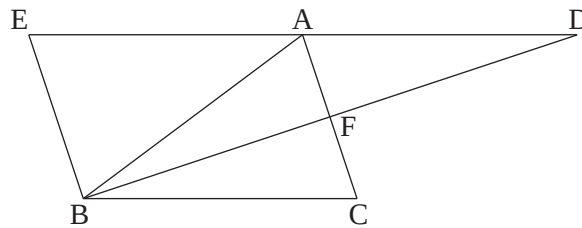
סכום זוויות במשולש הוא 180°

זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים

סכום זוויות במשולש הוא 180°

מול זוויות שוות צלעות שוות

שאלה 4



BF הוא תיכון לצלע AC

במשולש ABC.

נקודה D נמצאת על המשך BF

ומתקיים $DF = FB$ (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע ADCB הוא מקבילית.

ב. נקודה E נמצאת על המשך DA, ומתקיים $DA = AE$ (ראה ציור).

הוכח כי CE חוצה את הצלע AB.

ג. נתון גם כי $EB \perp BD$.

הוכח כי משולש ABC הוא שווה-שוקיים.

ד. אם נתון כי משולש ABC הוא שווה-צלעות, מצא את גודל הזווית ADF.

פתרון לשאלה 4

א. לפי הנתון: $AF = FC$, $DF = FB$

$\Downarrow$

ADCB — מקבילית

מרובע שבו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.

ב. נתון: $DA = AE$

לפי סעיף א: $DA \parallel CB$, $DA = CB$

$\Downarrow$

$AE \parallel CB$, $AE = CB$

$\Downarrow$

EACB — מקבילית

מרובע שבו שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו ושוות זו לזו הוא מקבילית.

$\Downarrow$

CE חוצה את AB

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

ג. לפי הנתון: $DA = AE$, $EBD = 90^\circ$

$\Downarrow$

$BA = DA$

במשולש ישר-זווית תיכון ליתר שווה לחצי היתר.

$DA = CB$

ADCB — מקבילית.

$BA = CB$

לכן:

המשך פתרון לשאלה 4.

ד. לפי הנתון:

BF תיכון במשולש שווה צלעות ABC



BF חוצה זווית ABC



$$\sphericalangle FBC = 30^\circ$$



זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו

$$\sphericalangle ADF = 30^\circ$$

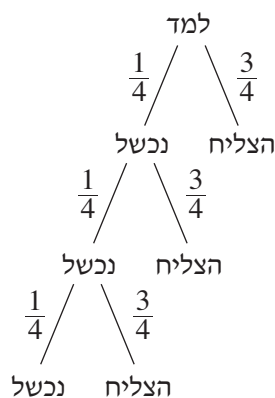
/המשך בעמוד 10/

שאלה 5

- בעיר מסוימת חלק מהנבחנים במבחן תאוריה של נהיגה למדו בקורס הכנה למבחן זה. כל מי שנכשל במבחן ניגש למבחנים חוזרים, עד שהוא מצליח. ידוע כי אם נבחן למד בקורס הכנה, הסיכוי שיצליח במבחן הוא 75%. סיכוי זה נשאר קבוע גם במבחנים החוזרים (אפילו אם עוברים שוב קורס הכנה). א. מצא מהו הסיכוי של מי שלמד בקורס הכנה להצליח במבחן רק בפעם השלישית.
- 20% מתלמידי התיכון בעיר לומדים בקורס הכנה (השאר אינם לומדים). ידוע כי כל עוד תלמיד לא למד בקורס הכנה, הסיכוי שיצליח במבחן התאוריה הוא $\frac{1}{2}$. ב. תלמיד תיכון בעיר הצליח במבחן התאוריה. מהי ההסתברות שהתלמיד למד בקורס הכנה?
- ג. בבית ספר מסוים בעיר כל התלמידים לא למדו בקורס הכנה. ההנהלה החליטה שכל תלמיד שנכשל במבחן יחויב ללמוד בקורס, לפני שייגש למבחן חוזר. מצא מהו הסיכוי של תלמיד בבית ספר זה להצליח במבחן רק בפעם השלישית.

פתרון לשאלה 5

א. נתון: $P(\text{למד} / \text{הצליח}) = \frac{3}{4}$



על פי דיאגרמת העץ
ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(\text{למד והצליח רק בפעם השלישית}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

המשך פתרון לשאלה 5.

ב. לפי הנתון: $P(\text{למד}) = \frac{1}{5}$, $P(\text{לא למד} / \text{הצליח}) = \frac{1}{2}$, $P(\text{למד} / \text{הצליח}) = \frac{3}{4}$

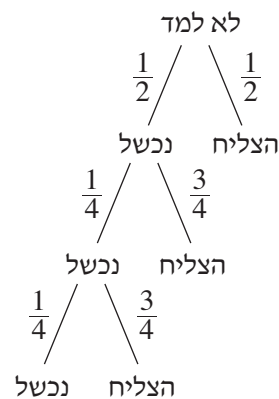
$$P(\text{למד} \cap \text{הצליח}) = P(\text{למד} / \text{הצליח}) \cdot P(\text{הצליח}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

$$P(\text{לא למד} \cap \text{הצליח}) = P(\text{לא למד} / \text{הצליח}) \cdot P(\text{הצליח}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{הצליח}) = P(\text{למד} \cap \text{הצליח}) + P(\text{לא למד} \cap \text{הצליח}) = \frac{3}{20} + \frac{2}{5} = \frac{11}{20}$$

$$P(\text{הצליח} / \text{למד}) = \frac{P(\text{למד} \cap \text{הצליח})}{P(\text{הצליח})} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{11}{20}} = \frac{3}{11}$$

ג.



$$P(\text{הצליח רק בפעם השלישית}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

על פי דיאגרמת העץ
ההסתברות המבוקשת היא:

שאלה 6

בדיקה רפואית מאבחנת מחלה מסוימת.

1% מהנבדקים הבריאים הבדיקה מאבחנת בטעות כחולים,

ו- 5% מהנבדקים החולים היא מאבחנת בטעות כבריאים.

ידוע כי 99% מהנבדקים הם בריאים.

א. איזה חלק מהנבדקים הבדיקה מאבחנת בטעות?

ב. מבין הנבדקים שאובחנו כחולים, איזה חלק חולה באמת?

ג. באוכלוסייה אחרת, מבין הנבדקים שאובחנו כחולים בבדיקה, החלק של החולים באמת היה

גדול יותר מזה שבסעיף ב.

האם באוכלוסייה האחרת היחס בין החולים לבריאים גדול יותר מהיחס באוכלוסייה הנתונה,

קטו ממנו או שווה לו? נמק. (כושר האבחון של הבדיקה אינו משתנה.)

פתרון לשאלה 6

א. לפי הנתון: $P(\text{בריא} / \text{אובחן כחולה}) = 0.01$, $P(\text{חולה} / \text{אובחן כבריא}) = 0.05$, $P(\text{בריא}) = 0.99$

$$P(\text{טעות}) = P(\text{חולה} \cap \text{אובחן כבריא}) + P(\text{בריא} \cap \text{אובחן כחולה}) =$$

$$= 0.01 \times 0.99 + 0.05 \times 0.01 = 0.0104$$

ב. לפי סעיף א: $P(\text{בריא} \cap \text{אובחן כחולה}) = 0.01 \times 0.99 = 0.0099$,

$$P(\text{חולה} \cap \text{אובחן כבריא}) = 0.05 \times 0.01 = 0.0005$$

לפי הנתון: $P(\text{בריא}) = 0.99$

לכן מקבלים את הטבלה:

	חולה	בריא	
אובחן כבריא	0.0005	0.9801	0.9806
אובחן כחולה	0.0095	0.0099	0.0194
	0.01	0.99	

$$P(\text{אובחן כחולה} / \text{חולה}) = \frac{P(\text{אובחן כחולה} \cap \text{חולה})}{P(\text{אובחן כחולה})} = \frac{0.0095}{0.0194} = 0.4897$$

המשך פתרון לשאלה 6.

ג. מניסוח נוסחת בייס כיחס מקבלים:

$$\frac{P(\text{אובחן כחולה} / \text{חולה})}{P(\text{אובחן כחולה} / \text{בריא})} = \frac{P(\text{חולה} / \text{אובחן כחולה})}{P(\text{בריא} / \text{אובחן כחולה})} \cdot \frac{P(\text{חולה})}{P(\text{בריא})}$$

⇓

$$\frac{P(\text{אובחן כחולה} / \text{חולה})}{1 - P(\text{אובחן כחולה} / \text{חולה})} = \frac{P(\text{חולה} / \text{אובחן כחולה})}{P(\text{בריא} / \text{אובחן כחולה})} \cdot \frac{P(\text{חולה})}{P(\text{בריא})}$$

לפי הנתון באוכלוסייה האחרת היחס: $P(\text{אובחן כחולה} / \text{חולה})$ גדל

⇓

$$\frac{P(\text{אובחן כחולה} / \text{חולה})}{1 - P(\text{אובחן כחולה} / \text{חולה})} \quad \text{גדל כי המונה גדל והמכנה קטן}$$

כושר האבחון אינו משתנה, לכן היחס: $\frac{P(\text{חולה} / \text{אובחן כחולה})}{P(\text{בריא} / \text{אובחן כחולה})}$ נשאר קבוע

לכן היחס בין חולים לבריאים: $\frac{P(\text{חולה})}{P(\text{בריא})}$ גדל