

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ד'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — טריגונומטריה במישור ובמרחב,

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של

הפונקציות הטריגונומטריות

—	$33 \frac{1}{3} \times 1$	—	$33 \frac{1}{3}$
נקודות			

פרק שני — חזקות ולוגריתמים,

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

—	$33 \frac{1}{3} \times 2$	—	$66 \frac{2}{3}$
נקודות			
סה"כ	—	100	נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

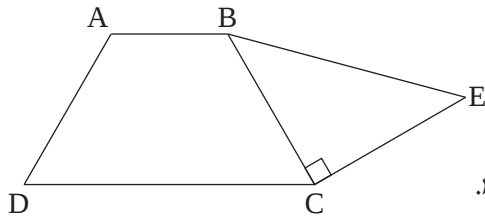
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

שאלה 1



נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

דרך הקדקוד C העבירו אנך לשוק BC , כמתואר בציור.

E היא נקודה על האנך כך שהמשולש BCE הוא שווה-שוקיים (ראה ציור).

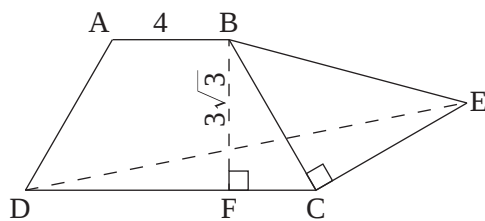
נתון: $AB = 4$ ס"מ, $\angle ABC = 120^\circ$, גובה הטרפז שווה ל- $3\sqrt{3}$ ס"מ.

א. (1) מצא את אורך השוק של הטרפז.

(2) מצא את אורך הקטע DE .

ב. מצא את גודל הזווית BED .

פתרון לשאלה 1



$$BF = 3\sqrt{3}$$

א. (1) לפי הנתון:

זוויות חד-צדדיות בין מקבילים משלימות ל- 180°

$$\angle BCF = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

מכאן שבמשולש BFC

$$\frac{3\sqrt{3}}{BC} = \sin 60^\circ$$

מתקיים:

$\Downarrow$

$$BC = 6 \text{ ס"מ}$$

/המשך בעמוד 3/

המשך פתרון לשאלה 1 סעיף א.

$$DC = AB + 2 \cdot FC \quad (2) \quad \text{בטרפז שווה-שוקיים ABCD מתקיים:}$$

$$\Downarrow$$

$$I. DC = 4 + 2 \cdot FC$$

$$II. \frac{3\sqrt{3}}{FC} = \operatorname{tg} 60^\circ \quad \text{במשולש BFC מתקיים:}$$

$$DC = 10 \text{ ס"מ} \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

$$\sphericalangle DCE = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

משולש BCE הוא שווה-שוקיים

$$BC = CE = 6 \text{ ס"מ} \quad \text{וישר זווית, לכן:}$$

לפי משפט הקוסינוסים

$$DE^2 = DC^2 + CE^2 - 2 \cdot DC \cdot CE \cos \sphericalangle DCE \quad \text{במשולש DEC:}$$

$$\Downarrow$$

$$DE^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cos 150^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$DE = 15.49 \text{ ס"מ}$$

$$\frac{10}{\sin \sphericalangle DEC} = \frac{15.49}{\sin 150^\circ} \quad \text{ב. לפי משפט הסינוסים במשולש DEC:}$$

$$\Downarrow$$

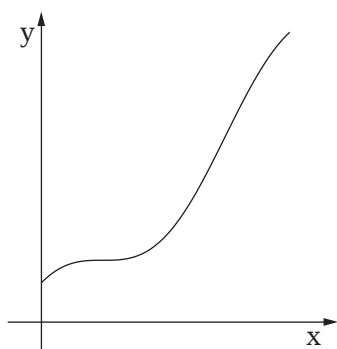
$$\sphericalangle DEC = 18.83^\circ$$

במשולש BCE שהוא

$$\sphericalangle BEC = 45^\circ \quad \text{שווה-שוקיים וישר זווית:}$$

$$\sphericalangle BED = 45^\circ - 18.83^\circ = 26.17^\circ$$

שאלה 2



נתונה הפונקציה $f(x) = x + \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ (ראה ציור).

בתחום הנתון מצא:

- את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן. נמק. תוכל להשאיר π בתשובתך.
- את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לציר ה- x . תוכל להשאיר π בתשובתך.
- את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק שאת משוואתו מצאת, ועל ידי ציר ה- y . תוכל להשאיר π בתשובתך.

פתרון לשאלה 2

$$f(x) = x + \cos x$$

א.

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = \pm 1 \Rightarrow \text{לא בתחום}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
f(x)	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$2\pi + 1$

הערך הקטן ביותר של $f(x)$ הוא ב- $x = 0$ והערך הגדול ביותר של $f(x)$ הוא ב- $x = 2\pi$.

לכן מינימום מוחלט הוא ב- $(0, 1)$ ומקסימום מוחלט הוא ב- $(2\pi, 2\pi + 1)$.

- שיפוע הישר המקביל לציר ה- x הוא 0, לכן הנגזרת בנקודת ההשקה שווה ל-0.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{לפי סעיף א:}$$

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \text{לכן משוואת המשיק היא:}$$

המשך פתרון לשאלה 2.

ג.

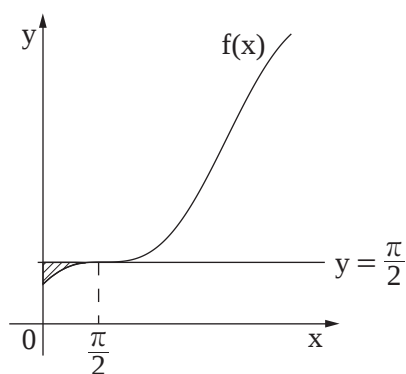
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - f(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x - \cos x) dx$$

$\Downarrow$

$$S = [\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} - \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\Downarrow$

$$S = \frac{\pi^2}{8} - 1$$



/המשך בעמוד 6/

שאלה 3

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{e^x} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית במידת הצורך.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ה. פונקציית הנגזרת של $g(x)$ מקיימת: $f(x) = g'(x)$.
 מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$. נמק.

פתרון לשאלה 3

א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x (כי $e^x \neq 0$ לכל x).

ב. נקודות החיתוך עם ציר ה- x : $(0, 0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$

נקודות החיתוך עם ציר ה- y : $3x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Downarrow$$

$$x = 0, \quad x = \frac{8}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$(0, 0), \quad \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

המשך פתרון לשאלה 3.

ג.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{(6x - 8)e^x - (3x^2 - 8x)e^x}{e^{2x}}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{e^x(-3x^2 + 14x - 8)}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$\Updownarrow$$

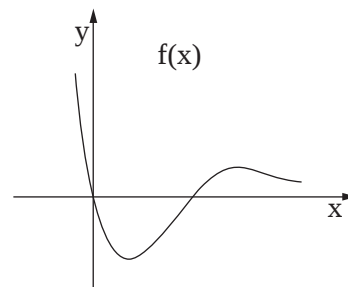
$$x = 4, \quad x = \frac{2}{3}$$

נקודות חשודות:

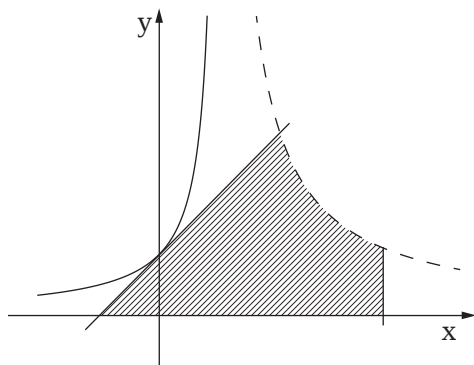
x	0		$\frac{2}{3}$		4		5
f(x)	0	$\searrow$	-2.05	$\nearrow$	0.29	$\searrow$	0.23

מינימום ב- $(\frac{2}{3}, -2.05)$ מקסימום ב- $(4, 0.29)$

ד.

ה. נתון כי $f(x) = g'(x)$, לכן $g'(x) = 0$ בנקודות שבהן: $x = 0, x = \frac{8}{3}$.לפי הגרף שבסעיף ד $g'(x)$ מחליפה סימן בנקודות אלה,לכן אלה הם שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

שאלה 4



בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{3}{x-1} \quad \text{בתחום } x > 1,$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{בתחום } x < 1.$$

א. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של כל אחת מהפונקציות.

ב. בנקודה שבה $x = 0$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

מצא את השיעורים של נקודת החיתוך של המשיק עם גרף

הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 1$.

ג. השטח, המוגבל על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x = a$

ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור), שווה ל-7.5.

מצא את הערך של a . תוכל להשאיר e בתשובתך.

פתרון לשאלה 4

א. אסימפטוטות של $f(x)$: $x = 1$, $y = 0$

אסימפטוטות של $g(x)$: $x = 1$, $y = 0$

ב.

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

$\Downarrow$

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$\Downarrow$

$$\text{I. } g'(0) = 1 \quad \text{שיפוע המשיק:}$$

$$\text{II. } g(0) = 1 \quad \text{נקודה על המשיק:}$$

$$y = x + 1 \quad \text{מ- I ומ- II מקבלים את משוואת המשיק:}$$

$$y = f(x)$$

$\Downarrow$

$$x + 1 = \frac{3}{x-1}$$

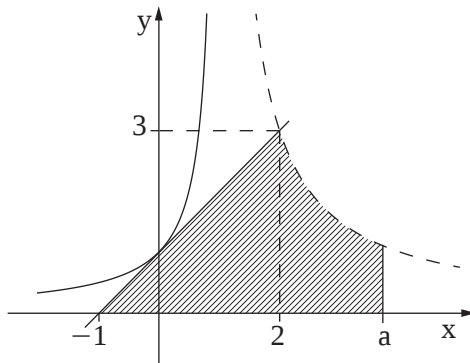
$\Downarrow$

$$\text{לא בתחום } x = -2, x = 2$$

$\Downarrow$

$$(2, 3) \quad \text{נקודת החיתוך:}$$

המשך פתרון לשאלה 4.



ג. נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x : $(-1, 0)$

$$S = S_{\text{משולש}} + \int_2^a f(x) dx$$

$\Downarrow$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \int_2^a \frac{3}{x-1} dx$$

$\Downarrow$

$$S = 4.5 + 3[\ln(x-1)]_2^a$$

$\Downarrow$

$$\text{I. } S = 4.5 + 3\ln(a-1)$$

$$\text{II. } S = 7.5$$

לפי הנתון:

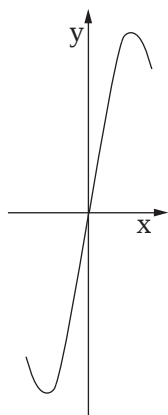
$$\ln(a-1) = 1$$

מ- I ו- II מקבלים:

$\Updownarrow$

$$a = e + 1$$

שאלה 5



נתונה הפונקציה $f(x) = 4x + x\sqrt{4-x^2}$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. לפונקציה יש מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט, כמתואר בציור.

מצא את השיעורים של נקודת המקסימום המוחלט ושל נקודת המינימום המוחלט.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ג. נתון הישר $y = k$, $k > 0$.

עבור אילו ערכים של k , הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות?

פתרון לשאלה 5

$$f(x) = 4x + x\sqrt{4-x^2} \quad \text{א.}$$

$$4 - x^2 \geq 0 \quad f(x) \text{ מוגדרת אם ורק אם:}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{תחום ההגדרה:}$$

$$f'(x) = 4 + \sqrt{4-x^2} - \frac{2x \cdot x}{2\sqrt{4-x^2}} \quad \text{ב.}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{4-x^2} + 4 - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{4-x^2} = 2x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4(4-x^2) = (x^2-2)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^4 = 12$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y = \pm 8.81 \Leftrightarrow x = \pm 1.86 \quad \text{נקודות הקיצון ב-}$$

$$(-1.86, -8.81) \quad \text{מינימום מוחלט:}$$

$$(1.86, 8.81) \quad \text{מקסימום מוחלט:}$$

המשך פתרון לשאלה 5.

ג.

$$f(2) = 8$$

$\Downarrow$

$$8 \leq k < 8.81$$

לכן לפי הגרף:

