

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ג, 2013
מספר השאלון: 303,035003
נספח: דפי נוסחאות ל-3 יחידות לימוד

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

שאלון ג'

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה חמש שאלות בנושאים:

אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

עליך לענות על שלוש שאלות

— $3 \times \frac{1}{33} = 100$ נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

- המרחק בין עיר A לעיר B הוא 135 קילומטרים.
 בבוקר נסע דן במכוניתו מעיר A לעיר B במהירות קבועה.
 בערב הוא חזר מעיר B לעיר A במהירות קבועה הקטנה ב-10% מהמהירות שנסע בה בבוקר,
 וזמן נסיעתו היה ארוך ב-10 דקות מזמן הנסיעה בבוקר.
 א. מה הייתה מהירות הנסיעה של דן בבוקר (בדרכו מעיר A לעיר B)?
 ב. ידוע כי דן יצא מעיר B בשעה 19:00 בערב. מתי הוא יגיע לעיר A?

פתרון לשאלה 1

- א. נסמן ב- x את מהירות הנסיעה של דן בבוקר:

נסיעה בבוקר	מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)
	x	$\frac{135}{x}$	135
נסיעה בערב	$0.9x$	$\frac{135}{0.9x}$	135

זמן הנסיעה בערב היה ארוך ב-10 דקות ($\frac{1}{6}$ שעה) מזמן הנסיעה בבוקר $\Leftrightarrow$

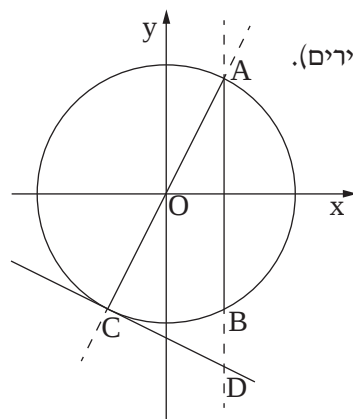
$$\frac{135}{x} + \frac{1}{6} = \frac{135}{0.9x}$$

$\Downarrow$

$$x = 90 \text{ קמ"ש}$$

- ב. זמן הנסיעה בערב הוא $1\frac{2}{3}$ שעות $= \frac{135}{0.9 \cdot 90} \Leftrightarrow$ דן יגיע לעיר A בשעה 20:40.

שאלה 2



בציור שלפניך נתון המעגל $x^2 + y^2 = 125$ (O – ראשית הצירים).

A ו-B הן נקודות החיתוך של המעגל עם הישר $x = 5$.

AC הוא קוטר במעגל.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח קוטר המעגל, AC.

ג. מעבירים משיק למעגל בנקודה C.

מצא את משוואת המשיק.

ד. ההמשך של הקטע AB חותך את המשיק בנקודה D.

מצא את אורך הקטע CD.

ה. הסבר מדוע משולש OCD הוא ישר-זווית ושווה שוקיים.

פתרון לשאלה 2

א. למציאת נקודות החיתוך A ו-B נציב $x = 5$ במשוואת המעגל $x^2 + y^2 = 125$ $\Leftrightarrow A(5, 10), B(5, -10)$

ב. נמצא את השיפוע ואת משוואת הישר לפי הנקודות A(5, 10) ו-O(0, 0) שעל הישר.

$\Downarrow$

$$m_{AO} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{10 - 0}{5 - 0} = 2$$

משוואת ישר העובר דרך הראשית היא $y = mx$

$\Downarrow$

$$y = 2x$$

ג. O(0, 0) היא אמצע הקטע AC. נמצא את שיעורי הנקודה C לפי שיעורי הנקודות A(5, 10) ו-O(0, 0).

$$\frac{x_C + x_A}{2} = 0, \quad \frac{y_C + y_A}{2} = 0$$

$$C(-5, -10) \quad \Leftrightarrow \quad A(5, 10)$$

$$m_{\text{משיק}} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot m_{\text{משיק}} = -1$$

מתנאי ניצבות של המשיק והרדיוס $2 \cdot m_{\text{משיק}} = -1$

מכאן נמצא את משוואת המשיק לפי השיפוע ולפי הנקודה C(-5, -10)

$\Downarrow$

$$CD: y = -\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$$

המשך הפתרון של שאלה 2.

ד. נמצא את שיעור ה- y של הנקודה D בהצבת $x = 5$ במשוואת המשיק $\Leftrightarrow y_D = -15$.

$$CD = \sqrt{125} \Leftrightarrow C(-5, -10), D(5, -15)$$

ה. ישר זווית: CD משיק למעגל $\odot CO$ רדיוס $\Leftrightarrow \angle OCD = 90^\circ$.

שווה שוקיים: ממשוואת המעגל רואים כי $OC = r = \sqrt{125} \Leftrightarrow OC = CD$.

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3

נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
 ה. נתון כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(2.52, 0)$.
 היעזר בנתון זה ובתשובותיך לסעיפים א-ד וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון לשאלה 3

א. תחום ההגדרה הוא $x \geq 0$.

ב. $y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

$y' = 0$ בנקודות קיצון

$$2x = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \text{נעלה את שני האגפים בריבוע} \Leftrightarrow 4x^2 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$y = -3$ ולכן $(1, -3)$ היא נקודה חשודה לקיצון.

נבדוק את סוגה:

x	$\frac{1}{4}$	1	4
y'	$-3\frac{1}{2}$	0	7
y	$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

$(1, -3) \text{ Min}$

x	0	1	4
y	0	-3	8

או לפי שיעור y :

$0 < x < 1$

$1 < x$

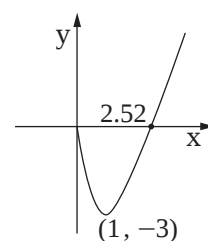
ג. תחום ירידה:

תחום עלייה:

$(0, 0)$

ד. $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ה.



שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = -4x^3 + 6x^2$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה A (אינה ראשית הצירים).

מצא את שיעורי הנקודה A .

ג. משוואת הישר העובר דרך נקודת המקסימום של הפונקציה

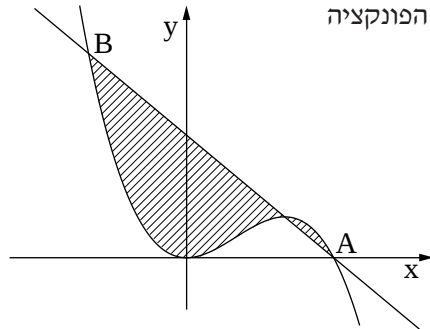
ודרך הנקודה A היא $y = -4x + 6$.

הישר חותך את גרף הפונקציה

בנקודה $B(-1, 10)$ (ראה ציור).

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

ועל ידי הישר AB (השטח המקווקו בציור).



פתרון לשאלה 4

$$f'(x) = -12x^2 + 12x \quad \text{א.}$$

$$12x(-x+1) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ בנקודות קיצון}$$

$$x_2 = 1, x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\Downarrow$

$$\text{לכן } (0, 0) \text{ ו- } (1, 2) \text{ הן נקודות חשודות לקיצון.}$$

נבדוק את סוג הקיצון:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	-24	0	3	0	-24
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\Downarrow$

$$(1, 2) \text{Max}, (0, 0) \text{Min}$$

$$A(1.5, 0) \Leftrightarrow x = 0, x = 1.5 \Leftrightarrow x^2(-4x+6) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{ב.}$$

ג. נשים לב כי בתחום בין x_B לבין $x_2 = 1$ (נקודת המקסימום) הישר הוא מעל לפונקציה, ובתחום בין x_2 לבין x_A

הפונקציה היא מעל לישר.

נחבר את שני חלקי השטח ונקבל:

$$S = \int_{-1}^1 [-4x + 6 - (-4x^3 + 6x^2)] dx + \int_1^{1.5} [-4x^3 + 6x^2 - (-4x + 6)] dx$$

$\Downarrow$

$$S = (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x) \Big|_{-1}^1 + (-x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x) \Big|_1^{1.5}$$

$\Downarrow$

$$S = 8\frac{3}{16}$$

/המשך בעמוד 7/

שאלה 5

- א. מבין כל זוגות המספרים החיוביים x ו- z המקיימים $x \cdot z = 48$, מצא את זוג המספרים שעבורם הסכום $x + 3z$ הוא מינימלי.
- ב. מהו הסכום המינימלי?

פתרון לשאלה 5

- א. נביע את הסכום בעזרת x ($x > 0$): $x \cdot z = 48 \Leftrightarrow z = \frac{48}{x} \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{3 \cdot 48}{x}$ פונקציה המתארת את הסכום

כדי למצוא את המינימום נגזור את פונקציית הסכום ונשווה ל-0:

$$1 - \frac{144}{x^2} = 0, f'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm 12$$

נתון $x > 0 \Leftrightarrow$ נבדוק רק את $x = 12$:

x	4	12	16
$f'(x)$	-8	0	0.4375
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{48}{12} = 4$$

- ב. $f(12) = 24$ הסכום המינימלי

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \frac{9}{x}$ (a הוא פרמטר).

א. נתון כי $f'(1) = 12$. מצא את a.

הישר $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר עם הפונקציה.

ג. מצא את המשוואות של המשיקים לפונקציה בנקודות שמצאת בסעיף ב.

ד. מהי נקודת החיתוך של שני המשיקים שמצאת בסעיף ג?

פתרון לשאלה 6

$$f'(1) = a + 9 = 12, \quad f'(x) = a + \frac{9}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 3$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x - \frac{9}{x} \\ y = 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$6 = 3x - \frac{9}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1$$

$$(3, 6), (-1, 6)$$

ג. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה כלשהי שווה לערך הנגזרת בנקודה זו.

נמצא את המשוואה של כל משיק לפי שיפוע ונקודה:

$$f'(3) = 4, \quad (3, 6) \quad f'(-1) = 12, \quad (-1, 6)$$

$$\Downarrow$$

$$y - 6 = 4(x - 3) \quad y - 6 = 12(x + 1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 4x - 6 \quad y = 12x + 18$$

$$(-3, -18) \quad y = -18 \Leftrightarrow x = -3 \Leftrightarrow 12x + 18 = 4x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 18 \\ y = 4x - 6 \end{cases} \quad \text{ד.}$$