

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 55 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции
Вы должны ответить на три вопроса по вашему выбору – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ баллов.

- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
 2. Листы с формулами (прилагаются).
 3. Двуязычный словарь.

- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
 2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

הוראות

- א. משך הבחינה: שתיים וחמישים וחמש דקות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
 3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5 (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дана окружность, заданная уравнением $(x - \sqrt{k})^2 + y^2 = 36$,

и дан эллипс, заданный уравнением $9x^2 + ky^2 = 9k$.

k – параметр, $k > 9$.

Точка M – центр окружности, а точка F – правый фокус эллипса.

Точка B – точка пересечения эллипса с положительной частью оси y .

(**ж**) Найдите координаты точек M , B и F . При необходимости выразите свои ответы при помощи k .

Точка O – начало координат.

Известно, что площадь треугольника BOF в 4 раза больше площади треугольника BFM .

(**з**) Найдите значение k .

Подставьте $k = 25$ и ответьте на вопросы пунктов (**д**)–(**т**).

Точка A – точка пересечения данного эллипса с отрицательной частью оси x .

Через точку A провели две касательные к данной окружности.

(**д**) Найдите уравнения двух этих касательных.

Одна из прямых, которые вы нашли в пункте (**д**), касается окружности в точке C ,

а другая прямая касается окружности в точке D .

(**т**) Найдите периметр четырехугольника $ACMD$.

2. На чертеже справа изображена пирамида $SABCD$ с квадратным основанием $ABCD$.

Ребро AS – высота пирамиды.

Длина ребра AS равна длине стороны квадрата $ABCD$.

Точка E – такая точка на ребре SD , что $SE = \frac{3}{4} \cdot SD$.

Для точки N выполняется: $\overrightarrow{SN} = k \cdot \overrightarrow{SC}$. k – параметр.

Обозначим: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

(*) Выразите вектор $\overrightarrow{EN}$ при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ и k .

Дано: $|\overrightarrow{EN}| = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot |\underline{w}|$.

(а) Найдите значение k .

Подставьте $k = \frac{1}{2}$ и ответьте на вопросы пунктов (а)–(г).

Пирамиду располагают в системе координат так, что $A(0, 0, 0)$, $B(0, 12, 0)$.

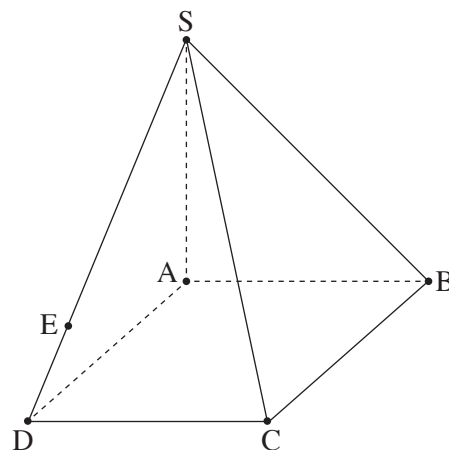
Вершина D лежит на положительной части оси x , а вершина S лежит на положительной части оси z .

(а) (1) Найдите координаты точек N и E .

(2) Найдите уравнение плоскости ENB .

(г) Больше ли объем пирамиды $SENB$ объема пирамиды $CENB$, меньше его или равен ему?

Обоснуйте свой ответ.



3. Даны три комплексных числа:

$$z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ)), \quad w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}.$$

$$r > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Точка A представляет число w на гауссовой плоскости.

Известно, что координата x точки A равна -1 .

(*) Найдите значение α .

Известно, что точка A лежит на прямой $y = -1$.

(а) Найдите значение r .

$$\text{Дано уравнение } z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2.$$

z – комплексная переменная.

(а) Найдите все четыре решения данного уравнения.

Точка O – начало координат.

Каждая из точек B и C представляет одно из тех решений, которые вы нашли в пункте (а).

Точка B лежит в первом квадранте, а точка C – во втором квадранте.

Геометрическое место всех точек $z = x + iy$ на гауссовой плоскости, для которых выполняется $|z| = b$, пересекает положительную часть оси y в точке K .

b – положительное действительное число.

Известно, что площадь четырехугольника $СКВО$ равна $7\sqrt{2}$.

(г) Найдите значение b .

/продолжение на странице 4/

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{5}{e^x - 5} + a$.

a – параметр.

(*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

Если нужно, выразите свои ответы при помощи a .

(*) Докажите, что производная $f'(x)$ отрицательна на всей своей области определения.

Известно, что прямая $y = 2$ является асимптотой функции $f(x)$.

(*) Найдите два возможных значения a .

Подставьте $a = 2$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (7)–(1).

(7) Покажите, что $f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$.

(7) (1) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

(2) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(1) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью x и прямой $x = \ln 2$.

5. Дана функция $f(x) = 8 \cdot \ln(x^2 + 7) - 2x$, которая определена для любого x .

(*) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(*) Найдите области выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$.

Известно, что график функции $f(x)$ пересекает ось x только в одной точке.

(*) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \ln(f(x) - 18)$, определенная на области, где $f(x) > 18$.

(7) (1) Сколько у функции $g(x)$ асимптот, перпендикулярных оси x ? Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите координаты точки экстремума функции $g(x)$ и определите ее тип.

(3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.