

תוכנית חדשה

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 4 часа 20 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – короткие вопросы
Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей
Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости
Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций
Вы должны ответить на пять вопросов по своему выбору – за каждый вопрос 22 балла. Общее количество баллов, которое вы сможете набрать, не превысит 100.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – שאלות קצרות
פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות
פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – לכל שאלה 22 נקודות.
סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
- שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8 (за каждый вопрос – 22 балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на два из четырех пунктов (א)–(ד), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

(א) Известно, что равенство $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{b}$ выполняется при $n = 2$.

b – параметр, отличный от 0.

(1) Найдите значение b .

(2) Подставьте $b = 4$ и докажите методом математической индукции или любым другим способом, что данное равенство выполняется для любого натурального n .

(ב) На чертеже справа изображен график функции $f(x)$, область определения которой $x \leq 6$.

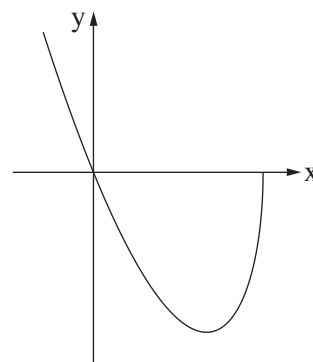
Одно из приведенных ниже выражений I–IV соответствует функции $f(x)$.

I. $f(x) = x\sqrt{6-x}$

II. $f(x) = -x\sqrt{6-x}$

III. $f(x) = x\sqrt{x-6}$

IV. $f(x) = -x\sqrt{x-6}$



(1) Определите, какое из выражений соответствует функции $f(x)$. Обоснуйте свой ответ.

Дана функция $g(x) = (f(x))^2$, область определения которой $x \leq 6$.

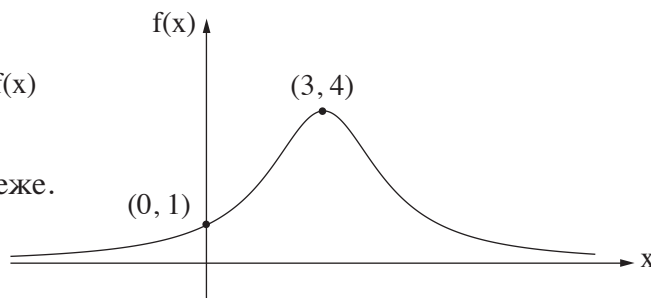
(2) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$ и осью x .

(ג) На чертеже ниже изображен график функции $f(x)$, определенной для любого x .

У функции $f(x)$ есть только одна точка экстремума и только одна горизонтальная асимптота, уравнение которой $y = 0$.

Координаты точки экстремума функции $f(x)$ и координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью y показаны на чертеже.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{f(x) - 2}$.



(1) Сколько асимптот, перпендикулярных

оси x есть у функции $g(x)$? Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите уравнение асимптоты функции $g(x)$, перпендикулярной оси y .

(3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

(7) На чертеже справа изображен прямоугольный треугольник ABC ($\sphericalangle CAB = 90^\circ$).

Известно, что длины сторон этого треугольника –
первые три члена некоторой геометрической прогрессии.

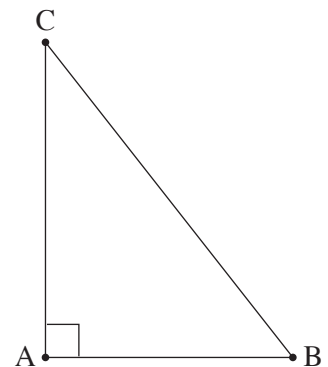
Первый член этой прогрессии равен длине стороны AB .

Дано: $AB = 1$.

(1) Может ли второй член этой прогрессии равняться длине
стороны BC ? Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите длину стороны BC

(в своем ответе можете оставить знак корня).



Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей

2. a_n – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, все члены которой положительные и знаменатель которой q .

(*) Ниже приведены три утверждения I–III. Определите, какое из этих утверждений верно и обоснуйте свой ответ.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n – бесконечная последовательность, для членов которой выполняется $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ при любом натуральном n .

(*) Докажите, что последовательность b_n – геометрическая прогрессия со знаменателем q .

Дано, что сумма членов прогрессии b_n в 1.96 раз больше суммы членов прогрессии a_n .

(*) Найдите значение q .

c_n – последовательность, для членов которой выполняется $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ при любом натуральном n .

Дано, что сумма k первых членов этой последовательности равна 34.79.

(*) (1) Докажите, что последовательность c_n является постоянной.

(2) Найдите значение k .

Поменяли знак у каждого из членов последовательности c_n с чётным номером.

(*) Найдите сумму k первых членов последовательности c_n после замены знаков. Обоснуйте свой ответ.

3. Чтобы быть принятым на работу в одну фирму, кандидаты должны пройти три этапа отбора один за другим: тест А, тест Б и личное собеседование.

Только кандидат, успешно сдавший тест А, может сдавать тест Б, и только кандидат, успешно сдавший тест Б, принимает участие в собеседовании.

Кандидата, прошедшего все три этапа, принимают на работу.

Вероятность того, что кандидат успешно сдаст тест А, равна p ($0 < p < 1$).

Вероятность того, что кандидат, успешно сдавший тест А, успешно сдаст тест Б, в 2 раза больше того, что кандидат успешно сдаст тест А.

Вероятность того, что кандидат будет принят на работу, в 3 раза больше вероятности того, что кандидат успешно сдаст оба теста, но не пройдет собеседование.

(*) Найдите вероятность того, что кандидат, успешно сдавший оба теста, пройдет собеседование.

94% кандидатов не принимают на работу.

(*) Найдите значение p .

(*) Известно, что кандидат не был принят на работу. Какова вероятность того, что этот кандидат успешно сдал тест А?

Из всех кандидатов, не принятых на работу, случайным образом выбирают 5 кандидатов.

- 05 (*) Какова вероятность, что по меньшей мере два из них успешно сдали тест А?

(продолжение на странице 5)

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. ABC – равносторонний треугольник, вписанный в окружность.

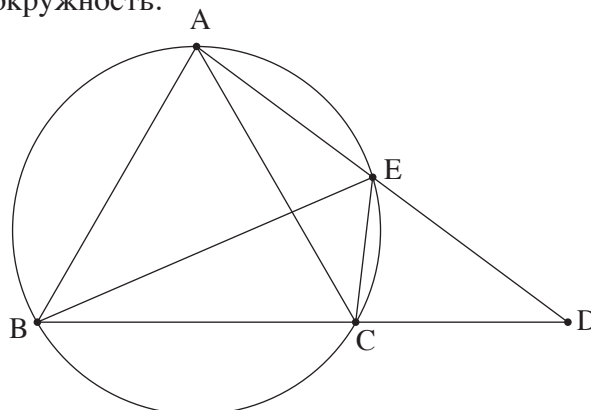
Точка D лежит на продолжении стороны BC ,
 как показано на чертеже.

Отрезок AD пересекает окружность в точке E .

(а) Докажите: $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

(б) Докажите: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

(в) Докажите: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.



Известно, что площадь треугольника AEB в 2.25 раз больше площади треугольника CED .

(г) Найдите, во сколько раз площадь треугольника ABD больше площади треугольника CED .

5. На чертеже справа изображен равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) .

Точка E – такая точка на основании BC , что $BE = 3 \cdot EC$.

Точка D – такая точка на стороне AC , что ED перпендикулярен AC .

Точка M – такая точка на стороне AB , что EM перпендикулярен AB .

Обозначим: $EC = k$, $\angle ABC = \alpha$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$.

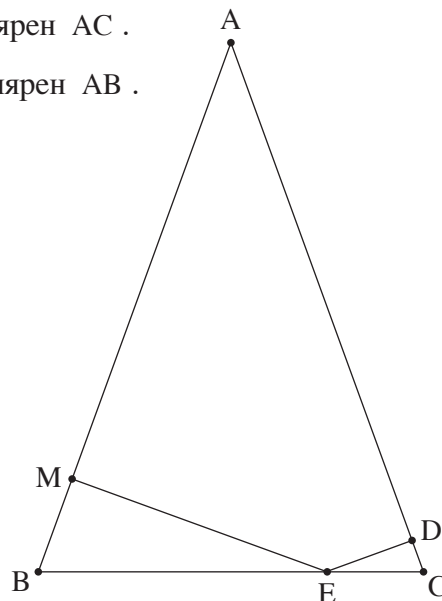
(а) Выразите при помощи k и α длины отрезков DE и ME .

Известно, что сумма площадей треугольников CED и BEM равна $1.6k^2$.

(б) Найдите значение α .

Известно, что длина радиуса окружности, описанной вокруг треугольника AED , равна 29 .

(в) Найдите значение k .



Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{6(x-1)^2}{x^2 + a}$.

a – положительный параметр.

(⌘) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

(Ⓐ) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип. Выразите свои ответы при помощи a , если это необходимо.

Известно, что координата y точки максимума функции $f(x)$ равна 7.5.

(Ⓜ) Найдите значение a .

Для найденного вами значения a ответьте на вопросы пунктов (т)–(н).

(т) Начертите схематический график функции $f(x)$.

$f'(x)$ – производная функции $f(x)$.

$g(x)$ – функция, для которой выполняется $g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

(н) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.

(2) Найдите области положительности и отрицательности функции $g(x)$.

(3) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$ и осью x на интервале $-a \leq x \leq 0$.

7. Дана функция $f(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x)$, определенная на интервале $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

(⌘) Докажите, что функция $f(x)$ четная.

(Ⓐ) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(Ⓜ) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Производная $f'(x)$ определена на интервале $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Дана функция $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$.

a – отрицательный параметр.

(т) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x .

Известно, что у функции $f(x)$ есть только одна точка перегиба в области определения функции $g(x)$.

(н) Начертите схематический график функции $g(x)$.

8. На чертеже справа изображены график функции $f(x) = (4x - 2)^3$

и прямая $y = 3x + b$.

b – положительный параметр.

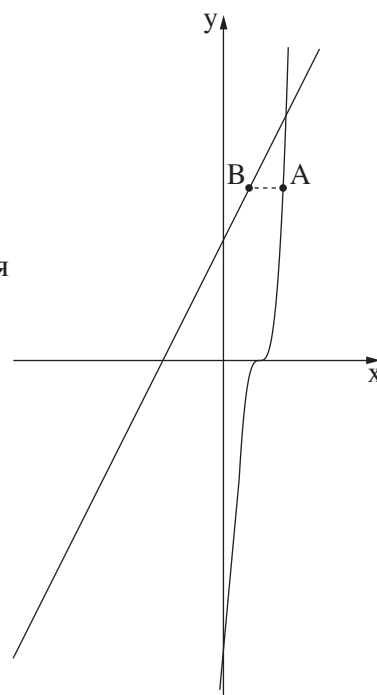
Точка A – такая точка на графике функции $f(x)$,

что ее координата x меньше, чем координата x точки пересечения графика функции $f(x)$ с данной прямой.

Точка B – такая точка на данной прямой, что отрезок AB параллелен оси x .

Обозначим через t координату x точки A .

Дано: $0 \leq t \leq 0.7$.



(*) Выразите при помощи b и t координату x точки B .

(*) (1) Найдите значение t , при котором длина отрезка AB будет минимальной.

(2) Найдите значение t , при котором длина отрезка AB будет максимальной.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.