

תוכנית חדשה

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : quatre heures et vingt minutes.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire en quatre parties comporte huit exercices.

Première partie — Exercices courts

Deuxième partie — Récurrence, suites et probabilités

Troisième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Quatrième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez cinq exercices de votre choix – 22 points par question.

Le total des points que vous pourrez cumuler ne sera pas supérieur à 100.

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les fonctionnalités de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des fonctionnalités de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointés au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — שאלות קצרות

פרק שני — אינדוקציה, סדרות והסתברות

פרק שלישי — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של

פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – לכל שאלה 22 נקודות.

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים

מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez cinq des exercices 1-8 (22 points par question).

Attention : si vous résolvez plus de cinq exercices, seuls les cinq premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie — Exercices courts

1. Répondez à deux des quatre articles א-ד ci-dessous. Si vous répondez à plus de deux articles, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

א. On sait que l'égalité $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{b}$ est vérifiée pour $n = 2$.

b est un paramètre différent de 0.

(1) Déterminez la valeur de b .

(2) Substituez $b = 4$ puis démontrez par récurrence mathématique, ou par tout autre méthode, que l'égalité donnée est vérifiée pour tout n entier naturel.

ב. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $x \leq 6$.

Une des expressions I – IV ci-dessous représente la fonction $f(x)$.

I. $f(x) = x\sqrt{6-x}$

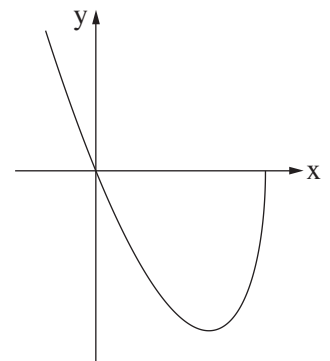
II. $f(x) = -x\sqrt{6-x}$

III. $f(x) = x\sqrt{x-6}$

IV. $f(x) = -x\sqrt{x-6}$

(1) Déterminez laquelle des expressions représente la fonction $f(x)$.

Justifiez votre réponse.



Soit la fonction $g(x) = (f(x))^2$ définie sur l'intervalle $x \leq 6$.

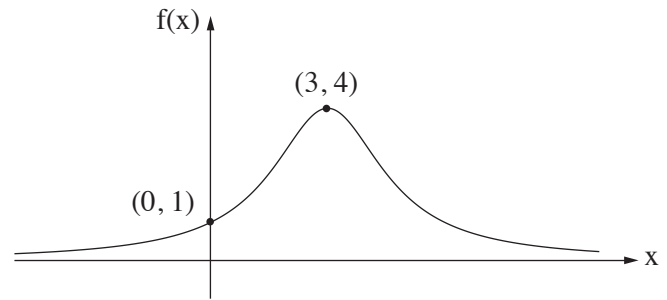
(2) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses.

- ג. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x)$, définie pour tout x .

La fonction $f(x)$ admet un seul point d'extremum et une seule asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$

et les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des ordonnées sont indiquées sur la figure.



Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{f(x) - 2}$.

- (1) Combien d'asymptotes perpendiculaires à l'axe des abscisses la fonction $g(x)$ admet-elle ? Justifiez votre réponse.
- (2) Déterminez l'équation de l'asymptote de la fonction $g(x)$ qui est perpendiculaire à l'axe des ordonnées.
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

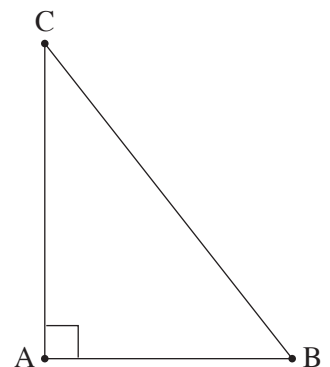
7. La figure ci-contre représente un triangle rectangle ABC ($\angle CAB = 90^\circ$).

On sait que les longueurs des côtés du triangle sont les trois premiers termes d'une suite géométrique.

Le premier terme de la suite est égal à la longueur du côté AB .

Donnée : $AB = 1$.

- (1) Le deuxième terme de la suite peut-il être égal à la longueur du côté BC ? Justifiez votre réponse.
- (2) Déterminez la longueur du côté BC (vous pourrez laisser une racine dans votre réponse).



Deuxième partie – Récurrence, suites et probabilités

2. a_n est une suite géométrique infinie décroissante dont tous les termes sont positifs et dont la raison est q .

א. Voici trois affirmations I–III. Déterminez laquelle des affirmations est correcte puis justifiez votre réponse.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n est une suite infinie dont les termes vérifient $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ pour tout n entier naturel.

א. Démontrez que la suite b_n est géométrique et que sa raison est q .

On sait que la somme des termes de la suite b_n est 1,96 fois supérieure à la somme des termes de la suite a_n .

א. Déterminez la valeur de q .

c_n est une suite dont les termes vérifient $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ pour tout n entier naturel.

On sait que la somme des k premiers termes de la suite vaut 34,79.

א. (1) Démontrez que la suite c_n est constante.

(2) Déterminez la valeur de k .

On a inversé le signe de chacun des termes situés aux emplacements pairs dans la suite c_n .

א. Déterminez la somme des k premiers termes de la suite c_n après l'inversion des signes. Justifiez votre réponse.

3. Pour être recruté à un emploi dans une société donnée, les candidats doivent passer avec succès trois étapes l'une après l'autre : un examen א, un examen ב et un entretien individuel.

Seuls les candidats qui réussissent l'examen א se présentent à l'examen ב et seuls les candidats qui réussissent l'examen ב se présentent à l'entretien.

Un candidat qui passe avec succès ces trois étapes est embauché.

La probabilité qu'un candidat réussisse l'examen א est p ($0 < p < 1$).

La probabilité qu'un candidat qui a réussi l'examen א réussisse l'examen ב est 2 fois supérieure à la probabilité qu'un candidat réussisse l'examen א.

La probabilité qu'un candidat soit embauché est 3 fois supérieure à la probabilité qu'un candidat réussisse les deux examens et qu'il ne réussisse pas l'entretien.

א. Déterminez la probabilité qu'un candidat qui a réussi les deux examens réussisse l'entretien.

94 % des candidats n'ont pas été embauchés.

א. Déterminez la valeur de p .

א. On sait qu'un candidat n'a pas été embauché. Quelle est la probabilité que ce candidat ait réussi l'examen א ?

Parmi les candidats qui n'ont pas été embauchés, on choisit 5 candidats au hasard.

א. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux aient réussi l'examen א ?

Troisième partie – Géométrie et trigonométrie dans le plan

4. ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle.

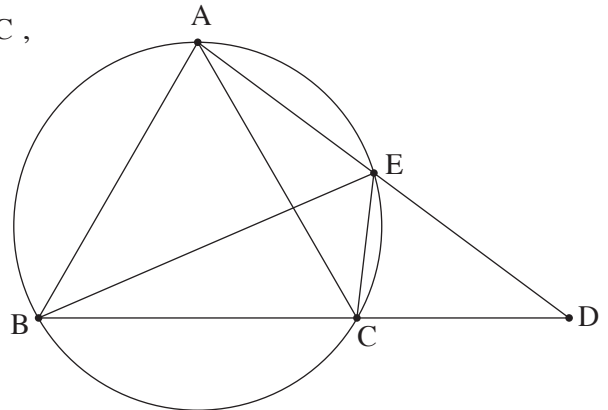
Le point D se trouve sur le prolongement du côté BC ,
comme indiqué sur la figure.

Le segment AD coupe le cercle en un point E .

א. Démontrez que $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

ב. Démontrez que $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

ג. Démontrez que $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.



On sait que l'aire du triangle AEB est 2,25 fois
supérieure à l'aire du triangle CED .

ד. Déterminez combien de fois l'aire du triangle ABD est supérieure à l'aire du triangle CED .

5. La figure ci-contre représente un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) .

Le point E se trouve sur la base BC tel que $BE = 3 \cdot EC$.

Le point D se trouve sur le côté AC tel que ED est
perpendiculaire à AC .

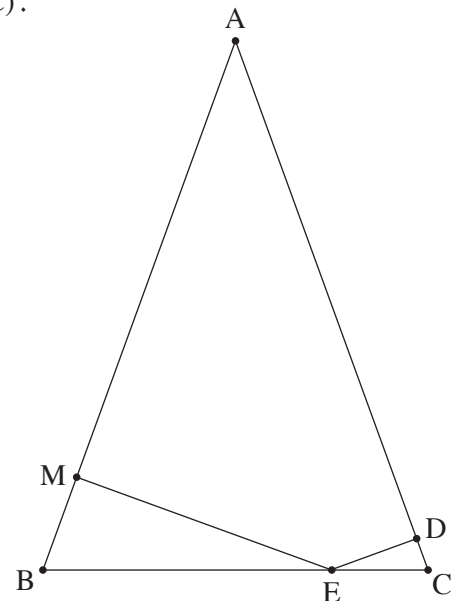
Le point M se situe sur le côté AB tel que EM est
perpendiculaire à AB .

On note : $EC = k$, $\angle ABC = \alpha$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$.

א. Exprimez la longueur des segments DE et ME en
fonction de k et α .

On sait que la somme des aires des triangles CED et BEM
vaut $1,6k^2$.

ב. Déterminez la valeur de α .



On sait que la longueur du rayon du cercle dans lequel le
triangle AED est inscrit vaut 29 .

ג. Déterminez la valeur de k .

Quatrième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{6(x-1)^2}{x^2 + a}$.

a est un paramètre positif.

א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

(2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).

ב. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type. Exprimez vos réponses en fonction de a si nécessaire.

On sait que l'ordonnée du point de maximum de la fonction $f(x)$ vaut 7,5.

ג. Déterminez la valeur de a .

Répondez aux articles 7 – 8 pour la valeur de a que vous avez déterminée.

7. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

$f'(x)$ est la fonction dérivée de la fonction $f(x)$.

$g(x)$ est une fonction qui vérifie $g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

ה. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.

(2) Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $g(x)$ est positive et les intervalles sur lesquels elle est négative.

(3) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses sur l'intervalle $-a \leq x \leq 0$.

7. Soit la fonction $f(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x)$, définie sur l'intervalle $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

א. Démontrez que la fonction $f(x)$ est paire.

ב. Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

ג. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

La fonction dérivée $f'(x)$ est définie sur l'intervalle $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Soit la fonction $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$.

a est un paramètre négatif.

7. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.

(2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $g(x)$ avec l'axe des abscisses.

On sait que la fonction $f(x)$ admet un seul point d'inflexion dans le domaine de définition de la fonction $g(x)$.

ה. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

8. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x) = (4x - 2)^3$ et la droite $y = 3x + b$.

b est un paramètre positif.

Le point A se trouve sur le graphe de la fonction $f(x)$, tel que son abscisse est inférieure à l'abscisse du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec la droite donnée.

Le point B se trouve sur la droite donnée, tel que le segment AB est parallèle à l'axe des abscisses.

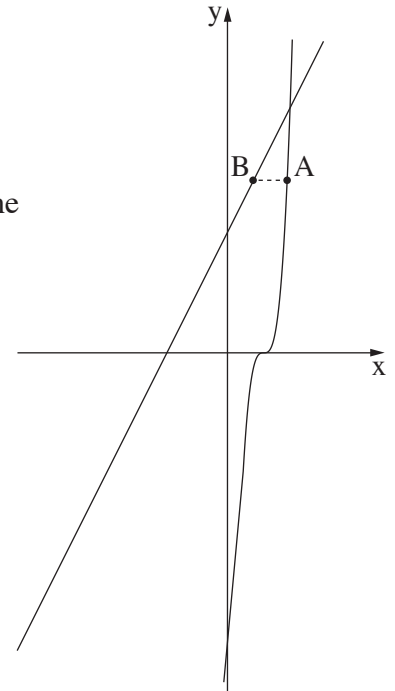
On note t l'abscisse du point A .

Donnée : $0 \leq t \leq 0,7$.

א. Déterminez l'abscisse du point B en fonction de b et de t .

ב. (1) Déterminez la valeur de t pour laquelle la longueur du segment AB est minimale.

(2) Déterminez la valeur de t pour laquelle la longueur du segment AB est maximale.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך