

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 30 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции
Вы должны ответить на три вопроса, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

- Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
- Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

הוראות

- א. משך הבחינה: שתיים וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. На чертеже справа представлены две прямые:

I. $-4x + 3y + 2 = 0$

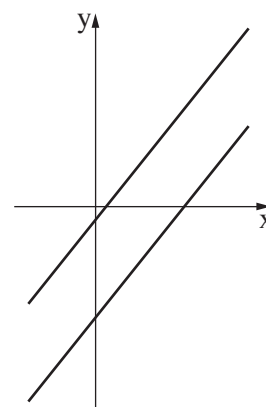
II. $-4x + 3y + 27 = 0$

Дана окружность, центр которой лежит на прямой II.

Эта окружность касается прямой I и оси x .

(*) (1) Найдите радиус этой окружности.

(2) Найдите два возможных уравнения такой окружности.



Точки M_1 и M_2 – это центры окружностей, найденных вами в пункте (*).

Координата x точки M_1 больше координаты x точки M_2 .

Окружность с центром M_2 касается оси x в точке A .

(*) Найдите площадь треугольника M_1AM_2 .

Прямая $x = a$ касается окружности с центром M_1 .

Дано: $a > 10.5$

(*) Покажите, что геометрическое место всех точек, расстояние от которых до прямой $x = a$ в $\sqrt{\frac{31}{6}}$ раз больше расстояния от них до точки A – это эллипс,

уравнение которого $\frac{x^2}{46.5} + \frac{y^2}{37.5} = 1$.

F – левый фокус эллипса, который вы нашли в пункте (*).

Точка E – такая точка этом эллипсе, что ее координата y отлична от 0 .

(*) Возможно ли, что площадь треугольника FEA больше площади треугольника M_1AM_2 ?

Обоснуйте свой ответ.

2. На чертеже справа изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$.

Обозначим: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

Точка E – середина ребра BB' .

(*) Выразите $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{EC}$ при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$ и $\underline{w}$.

Для точки M выполняется $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$.

(*) Выразите $\overrightarrow{EM}$ при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$ и $\underline{w}$.

Дано: $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$.

a и b – параметры.

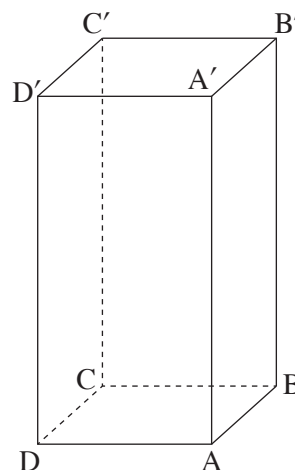
(*) (1) Найдите значение a и значение b .

(2) Лежит ли точка M на плоскости AEC ? Обоснуйте свой ответ.

Дано: $|\underline{w}| = 4$, вектор $\overrightarrow{BM}$ перпендикулярен плоскости AEC .

(*) Найдите значение $|\underline{u}|$ и значение $|\underline{v}|$.

(*) Вычислите расстояние между точкой B и плоскостью AEC .



3. Дано уравнение $z^3 = -64$.

z – комплексная переменная.

(к) Найдите все решения этого уравнения.

Даны два комплексных числа:

$$w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha),$$

$$50^\circ < \alpha < 130^\circ.$$

Две точки, соответствующие числам w_1 и w_2 , лежат на одной прямой, которая проходит через начало координат O в гауссовой плоскости.

(а) Найдите оба возможных значения α .

Известно, что w_1 – одно из решений, которые вы нашли в пункте (к).

(б) Найдите значение α и значение r .

Даны еще два комплексных числа: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$.

ABCD – выпуклый четырехугольник. Вершина A соответствует числу w_1 , вершина B соответствует числу w_3 , вершина C соответствует числу w_2 , вершина D соответствует числу w_4 .

(г) Покажите, что площадь четырехугольника ABCD равна 36.

u – комплексное число. Точка E, которая соответствует числу u , лежит в первом квадранте на биссектрисе угла BOA.

Известно, что $\bar{u} + \frac{1}{u} = 5.2 \cdot (\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ)$, $|u| > 1$.

(д) Найдите комплексное число u .

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $f(x) = x^n \cdot (3 - \ln x)$, определенная для $x > 0$.

n – параметр, n – натуральное число.

- (**х**) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке, в которой $x = 1$, равен 2.

- (**а**) Найдите значение n .

Подставьте $n = 1$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (**г**)–(**и**).

- (**а**) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.

- (**г**) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- (**н**) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.

- (2) Найдите уравнения асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных осям координат.

- (3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

a – параметр, $1 < a < 3$.

Известно, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = e$ и $x = e^a$, равна $\ln 10$.

- (**и**) Найдите значение a .

5. Дана функция $f(x) = 4e^x - x + 9 \cdot \ln(4 - e^x)$.

- (**х**) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

- (**а**) Покажите, что $f'(x) = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$.

- (**а**) (1) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$ (если таковые существуют).

- (2) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)$, параллельной оси x .

- (**г**) Начертите схематический график функции $f(x)$.

- (**н**) (1) Найдите уравнения асимптот производной $f'(x)$, перпендикулярных осям координат.

- (2) У функции $f(x)$ есть только одна точка перегиба. Начертите схематический график производной $f'(x)$ для $x < \ln 4$.

Дана функция $g(x) = f(x) + ax$, область определения которой совпадает с областью определения функции $f(x)$.

a – параметр.

- (**и**) Воспользуйтесь графиком производной $f'(x)$ и найдите, для каких значений a у функции $g(x)$ есть две точки экстремума. Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.