

תוכנית חדשה

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

- Продолжительность экзамена: 3 часа 45 минут.
- Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – короткие вопросы
Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей
Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости
Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций
Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого. $5 \times 20 = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

- Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
- Листы с формулами (прилагаются).
- Двуязычный словарь.

г. Особые указания:

- Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
- Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.
כתובת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

הוראות

- משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות.
- מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – שאלות קצרות
פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות
פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.
 $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- דפי נוסחאות (מצורפים).
- מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Желаем успеха!

בהצלחה!

(продолжение на странице 2)

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на два из четырех пунктов (א)–(ד), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

(א) Докажите методом математической индукции или любым другим способом, что для любого натурального n выполняется:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

(ב) В книжном шкафу Йонатана есть книги двух видов: комиксы и учебная литература. 60% книг – это комиксы, а остальные – учебная литература.

70% книг – это книги на иврите, а остальные на английском.

Ниже приведены два утверждения, I–II. Для каждого из них определите, верно ли оно, и обоснуйте свои ответы.

I. У Йонатана нет комиксов на иврите.

II. Вероятность случайным образом выбрать книгу на иврите из числа комиксов больше вероятности выбрать случайным образом комикс из числа книг на иврите.

(ג) На чертеже ниже изображен график функции $f(x)$, определенной для любого x .

У функции $f(x)$ есть только одна асимптота, уравнение которой $y = 0$,

и только одна точка пересечения с осью x ,

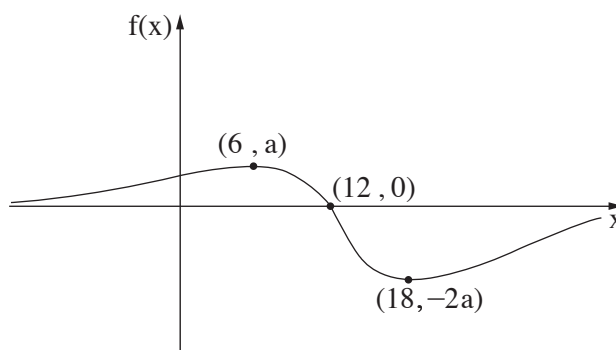
координаты которой $(12, 0)$.

Координаты всех точек экстремума

функции $f(x)$ отмечены на графике.

a – параметр, больший 1.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$.



(1) Найдите область определения функции $g(x)$.

(2) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Известно, что у прямой $y = \frac{a}{27}$ и графика функции $g(x)$ есть ровно 3 общих точки.

(3) Найдите значение a .

- (7) На чертеже справа изображен график функции $f(x) = \frac{-30x^2}{(x^3 - 8)^2}$, область определения которой $x \neq 2$.

На чертеже представлены все точки экстремума и все точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

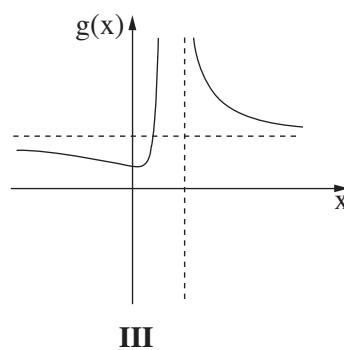
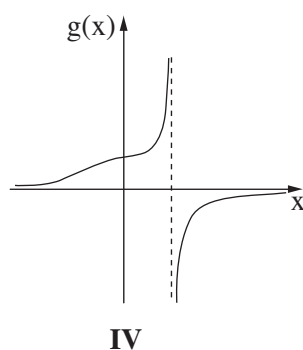
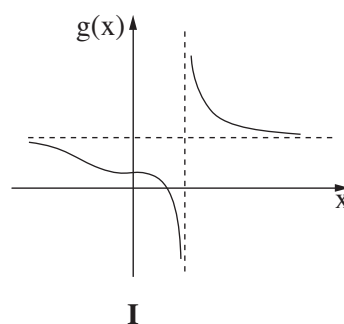
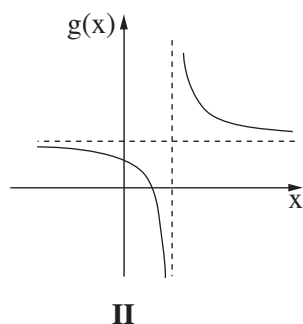
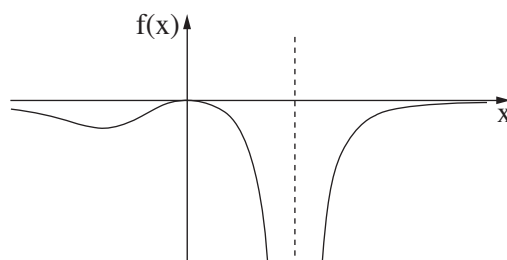
$g(x)$ – функция, для производной которой выполняется $g'(x) = f(x)$.

Функция $g(x)$ определена в области $x \neq 2$.

Известно, что график функции $g(x)$ проходит через точку $(0, 0.75)$.

- (1) Найдите функцию $g(x)$, для которой выполняются эти условия.
(2) Один из приведенных ниже графиков I–IV соответствует функции $g(x)$, для которой выполняются эти условия.

Определите, какой из них, и обоснуйте свой ответ.



Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей

2. a_n – бесконечно возрастающая геометрическая прогрессия, знаменатель которой q .
 b_n – бесконечно возрастающая геометрическая прогрессия, знаменатель которой $2q$.
 c_n – бесконечная последовательность, для членов которой выполняется $c_n = a_n \cdot b_n$ для любого натурального n .

(**к**) Докажите, что последовательность c_n – геометрическая прогрессия, и выразите при помощи q ее знаменатель.

Дано: $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$, $a_1 = b_1$.

(**а**) Найдите значение q .

(**б**) (1) Положительно или отрицательно значение a_1 ? Обоснуйте свой ответ.

(2) Возрастает или убывает прогрессия c_n ? Обоснуйте свой ответ.

Обозначим через S_1 сумму прогрессии a_n , через S_2 сумму прогрессии b_n и через S_3 сумму прогрессии c_n .

Дано: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

(**г**) Найдите значение a_1 .

3. В мешке 'к' и в мешке 'д' есть шары двух типов: мягкие шары и твердые шары.

В мешке 'к' 10 шаров, из них 4 мягких, а остальные – твердые.

В мешке 'д' 12 шаров, из них x мягких, а остальные – твердые.

Галит случайным образом выбирает мешок и случайным образом вынимает из него шар. Затем она возвращает шар в этот мешок и вынимает из того же мешка второй шар (вынимает с возвращением).

Дано: вероятность того, что Галит вынула два мягких шара, равна $\frac{41}{200}$.

(**к**) Найдите значение x .

(**а**) Известно, что Галит вынула два однотипных шара. Какова вероятность того, что она вынула два шара из мешка 'к'?

Галит выполняет описанную выше последовательность действий 4 раза:

она случайным образом выбирает мешок и случайным образом вынимает из него шар. Затем она возвращает шар в этот мешок и случайным образом вынимает из того же мешка второй шар (вынимает с возвращением).

(**б**) Какова вероятность, что ровно два раза из этих 4 раз она вынула только твердые шары?

(**г**) Какова вероятность, что два раза из этих 4 раз она вынула только твердые шары, а еще два раза она вынула только мягкие шары?

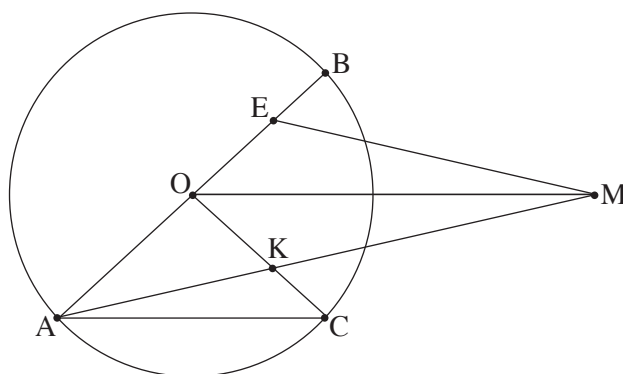
Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. На чертеже справа изображена окружность с центром в точке O .

AB – диаметр окружности.

Точка C лежит на окружности.

Точка M – такая точка вне окружности, что отрезок AM пересекает отрезок CO в точке K .



Точка E – такая точка на отрезке BO ,

что четырехугольник $EMKO$ является дельтоидом [דלתון] ($OK = OE$, $MK = ME$).

(⌘) Докажите, что $BC \parallel EK$.

(⚡) Докажите, что $OM \parallel AC$.

Дано: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

(ⓐ) Найдите значение $\frac{OM}{AC}$.

Обозначим через S площадь дельтоида $EMKO$.

(Ⓣ) Выразите при помощи S площадь треугольника AOC .

5. На чертеже справа изображена трапеция $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

Известно, что длина основания AB

равна длине боковой стороны BC .

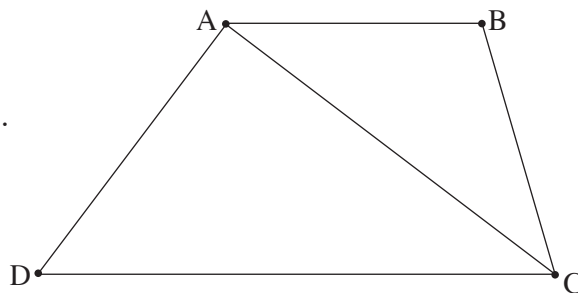
Обозначим: $AB = BC = k$, $\angle ACB = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(⌘) Покажите, что $AC = 2k \cdot \cos \alpha$.

Дано: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

(⚡) Найдите значение α .

(ⓐ) Найдите величину угла ADC .



Продолжения боковых сторон DA и CB пересекаются в точке E .

Известно, что длина радиуса окружности, вписанной в треугольник EDC , равна 14.

(Ⓣ) Найдите значение k .

Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{ax}{(x-3)^2}$, определенная в области $x \neq 3$.

a – положительный параметр.

(к) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(2). Выразите свои ответы при помощи a , если это необходимо.

(1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.

(г) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = f(x) + 0.5$, определенная в области $x \neq 3$.

Известно, что у графика функции $g(x)$ есть ровно одна общая точка с осью x .

(а) Найдите значение a .

Подставьте найденное вами значение a в функцию $g(x)$ и ответьте на пункт (т).

Дана функция $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, определенная в области $x \neq 3$.

(т) (1) Найдите области положительных и отрицательных значений функции $h(x)$.

(2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $h(x)$ и осью x на интервале $-9 \leq x \leq 0$.

7. Дана функция $f(x) = (1 + \cos x) \cdot (-1 + b \cos x)$, определенная на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$.

b – параметр.

Дано: $0 < b < 1$.

(к) Функция $f(x)$ четная или нечетная? Обоснуйте свой ответ.

(г) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

Известно, что у функции $f(x)$ есть точка экстремума в точке с координатой $x = \frac{\pi}{3}$.

(а) Найдите значение b .

Подставьте $b = \frac{1}{2}$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (т)–(п).

(т) (1) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(2) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $h(x) = f(x) + |f(x)|$, определенная на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$.

Точка A – некоторая точка на графике функции $h(x)$.

(п) Положительна, отрицательна или равна нулю координата y точки A , или это невозможно определить? Обоснуйте свой ответ.

8. На чертеже справа представлен график функции $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

Дана прямая $y = 3x - 3$.

(א) Найдите область определения функции $f(x)$.

(ב) Найдите координаты двух точек пересечения
графика функции $f(x)$ с данной прямой.

Точка A лежит на графике функции $f(x)$ в интервале
между двумя точками, которые вы нашли в пункте (ב).

Через точку A провели две прямые:

прямую, параллельную оси y и пересекающую данную прямую в точке B ,

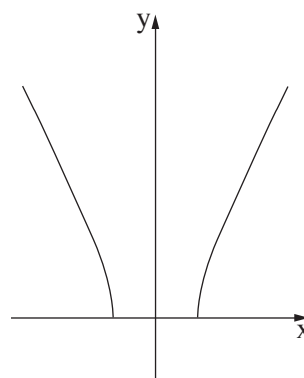
и прямую, параллельную оси x и пересекающую данную прямую в точке C .

Обозначим через t координату x точки A .

(ג) (1) Выразите при помощи t длину отрезка AB .

(2) Выразите при помощи t длину отрезка AC .

(ד) Найдите значение t , при котором сумма длин отрезков AB и AC будет максимальной.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.