

Mathématiques

5 unités d'étude – deuxième questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : deux heures et demi.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte deux parties constituées de cinq exercices.

Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.

Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.

Résolvez trois exercices dont au moins un exercice issu de chaque partie. $-3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (joint au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas l'exercice, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide d'une calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement.

Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שעותיים וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק

— $3 - 33 \frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Exercices

Résolvez trois des exercices 1-5, dont au moins un exercice de chaque partie ($33\frac{1}{3}$ points par exercice).

Attention : si vous résolvez plus de trois exercices, seuls les trois premiers exercices de votre cahier seront corrigés.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes

1. La figure ci-contre représente deux droites :

I. $-4x + 3y + 2 = 0$

II. $-4x + 3y + 27 = 0$

Soit un cercle dont le centre se trouve sur la droite II. Ce cercle est tangent à la droite I et à l'axe des abscisses.

α. (1) Déterminez le rayon du cercle.

(2) Déterminez les deux possibilités pour l'équation du cercle.

Les points M_1 et M_2 sont les centres des cercles que vous avez déterminés à l'article α.

L'abscisse du point M_1 est supérieure à l'abscisse du point M_2 .

Le cercle de centre M_2 est tangent à l'axe des abscisses au point A.

β. Déterminez l'aire du triangle M_1AM_2 .

La droite $x = a$ est tangente au cercle de centre M_1 .

Donnée : $a > 10,5$.

γ. Montrez que le lieu géométrique de tous les points dont la distance à la droite $x = a$ est $\sqrt{\frac{31}{6}}$

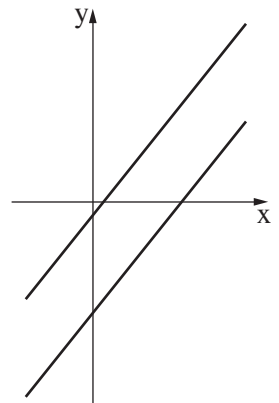
fois supérieure à leur distance au point A, est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{46,5} + \frac{y^2}{37,5} = 1$.

Le point F est le foyer gauche de l'ellipse que vous avez déterminée à l'article γ.

Le point E se trouve sur l'ellipse de sorte que son ordonnée est différente de 0.

δ. Est-il possible que l'aire du triangle FEA soit supérieure à l'aire du triangle M_1AM_2 ?

Justifiez votre réponse.



2. La figure ci-contre représente un pavé ABCDA'B'C'D'.

On note $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

Le point E est le milieu de l'arête BB'.

א. Exprimez $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$.

Le point M vérifie $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$.

א. Exprimez $\overrightarrow{EM}$ en fonction de $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$.

Donnée : $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$.

a et b sont des paramètres.

א. (1) Déterminez la valeur de a et la valeur de b.

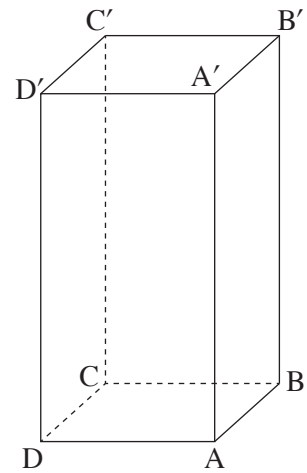
(2) Le point M se trouve-t-il sur le plan AEC ?

Justifiez votre réponse.

Données : $|\underline{w}| = 4$, et le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est perpendiculaire au plan AEC.

א. Déterminez la valeur de $|\underline{u}|$ et la valeur de $|\underline{v}|$.

א. Calculez la distance entre le point B et le plan AEC.



3. Soit l'équation $z^3 = -64$.

z est une variable complexe.

א. Déterminez toutes les solutions de cette équation.

Soit deux nombres complexes :

$$w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha),$$

$$50^\circ < \alpha < 130^\circ.$$

Les deux points qui représentent les nombres w_1 et w_2 se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine du repère O dans le plan de Gauss.

א. Déterminez les deux valeurs possibles de α .

On sait que w_1 est l'une des solutions que vous avez déterminées à l'article א.

א. Déterminez la valeur de α et la valeur de r .

Soit deux nombres complexes supplémentaires : $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$.

ABCD est un quadrilatère convexe. Le sommet A représente le nombre w_1 , le sommet B représente le nombre w_3 , le sommet C représente le nombre w_2 et le sommet D représente le nombre w_4 .

א. Montrez que l'aire du quadrilatère ABCD vaut 36.

u est un nombre complexe. Le point E qui représente le nombre u se trouve dans le premier quadrant sur la bissectrice de l'angle BOA.

$$\text{On sait que } \bar{u} + \frac{1}{u} = 5,2 \cdot (\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ), \quad |u| > 1.$$

א. Déterminez le nombre complexe u .

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions exponentielles et logarithmiques

4. Soit la fonction $f(x) = x^n \cdot (3 - \ln x)$ définie sur l'intervalle $x > 0$.

n est un paramètre entier naturel.

א. Déterminez les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

On sait que le coefficient directeur de la tangente au graphe de la fonction $f(x)$ au point d'abscisse $x = 1$ vaut 2.

ב. Déterminez la valeur de n .

Substituez $n = 1$ dans la fonction $f(x)$, puis répondez aux articles ג-ה.

ג. Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.

ה. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ו. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.

(2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $g(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.

(3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

a est un paramètre, $1 < a < 3$.

On sait que l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = e$ et $x = e^a$ vaut $\ln 10$.

ז. Déterminez la valeur de a .

5. Soit la fonction $f(x) = 4e^x - x + 9 \cdot \ln(4 - e^x)$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).
- ב. Montrez que $f'(x) = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$.
- ג. (1) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).
- (2) Déterminez l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x)$ qui est parallèle à l'axe des abscisses.
- ד. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
- ה. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction dérivée $f'(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (2) La fonction $f(x)$ admet un seul point d'inflexion. Tracez une esquisse du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle $x < \ln 4$.

Soit la fonction $g(x) = f(x) + ax$, dont le domaine de définition est identique à celui de la fonction $f(x)$. a est un paramètre.

- ו. En vous aidant du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$, déterminez pour quelles valeurs de a , la fonction $g(x)$ admet deux points d'extremum. Justifiez votre réponse.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך