

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : trois heures et demi.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire en trois parties comporte en tout huit exercices.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez cinq exercices, au moins un exercice de chaque partie —
 $5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointés au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas l'exercice, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק
— $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

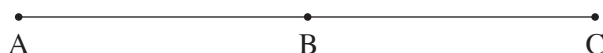
Exercices

Résolvez cinq exercices parmi les exercices 1-8, dont au moins un exercice de chaque partie (20 points par exercice).

Attention : Si vous résolvez plus de cinq exercices, seules les cinq premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Les localités A , B et C se trouvent sur une même droite. La localité B se trouve au milieu de la section AC (voir figure).



Un piéton est parti à 9:00 de la localité B et a marché à une vitesse constante vers la localité A .

Un cycliste est parti à 9:00 de la localité B et a roulé à une vitesse constante vers la localité C .

Lorsque le cycliste est arrivé à la localité C , il est immédiatement reparti vers la localité B à la même vitesse à laquelle il avait roulé précédemment.

Lorsque le cycliste est arrivé à la localité B , le piéton avait parcouru $\frac{2}{3}$ de la distance entre la localité B et la localité A .

⌘. Déterminez de combien de fois la vitesse du cycliste est supérieure à la vitesse du piéton.

Lorsque le cycliste est revenu à la localité B , il s'est reposé pendant une heure et il est ensuite parti vers la localité A à la même vitesse que celle à laquelle il avait roulé précédemment.

Lorsque le piéton est arrivé à la localité A , il est immédiatement reparti vers la localité B à la même vitesse que celle à laquelle il avait marché précédemment.

6 minutes après que le cycliste est parti de la localité B vers la localité A , il a croisé le piéton qui était sur son trajet retour de la localité A .

On note v la vitesse du piéton.

Ⓐ. Montrez que la distance entre la localité A et la localité C vaut $2,1v$.

Le lendemain, le cycliste et le piéton sont partis à la même heure de la localité C vers la localité A .

Le cycliste a roulé à une vitesse inférieure de 1 km/h à sa vitesse de la veille, et le piéton a marché à une vitesse supérieure de 2 km/h à sa vitesse de la veille.

45 minutes avant que le piéton soit arrivé à la localité A , le cycliste est arrivé à cette localité.

Ⓐ. Déterminez la distance entre la localité A et la localité C .

2. a_n est une suite géométrique infinie croissante de raison q .
 b_n est une suite géométrique infinie croissante de raison $2q$.
 c_n est une suite infinie dont les termes vérifient $c_n = a_n \cdot b_n$ pour tout n entier naturel.
 א. Démontrez que la suite c_n est géométrique, puis exprimez sa raison en fonction de q .

Données : $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$, $a_1 = b_1$.

- א. Déterminez la valeur de q .
 א. (1) La valeur de a_1 est-elle positive ou négative ? Justifiez votre réponse.
 (2) La suite c_n est-elle croissante ou décroissante ? Justifiez votre réponse.

On note S_1 la somme de la suite a_n , S_2 la somme de la suite b_n et S_3 la somme de la suite c_n .

Donnée : $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

- א. Déterminez la valeur de a_1 .

3. Le sac א et le sac ב contiennent deux types de balles : des balles molles et des balles dures.

Le sac א contient 10 balles, parmi lesquelles 4 sont molles et les autres sont dures.

Le sac ב contient 12 balles, parmi lesquelles x sont molles et les autres sont dures.

Galith choisit au hasard un sac et en tire une balle au hasard. Ensuite elle remet cette balle dans le sac et tire au hasard une deuxième balle du même sac (tirage avec remise).

On sait que la probabilité que Galith tire deux balles molles est de $\frac{41}{200}$.

- א. Déterminez la valeur de x .
 א. On sait que Galith a tiré deux balles du même type. Quelle est la probabilité qu'elle ait tiré deux balles du sac א ?

Galith effectue 4 fois le processus suivant :

elle choisit au hasard un sac et en tire une balle. Ensuite elle remet la balle dans le sac et tire au hasard une deuxième balle du même sac (tirage avec remise).

- א. Quelle est la probabilité que Galith ait tiré uniquement des balles dures exactement à deux des fois ?
 א. Quelle est la probabilité que Galith ait tiré deux fois uniquement des balles dures et deux fois uniquement des balles molles ?

Troisième partie – Géométrie et trigonométrie dans le plan

4. La figure ci-contre représente un cercle de centre O .

AB est un diamètre du cercle.

Le point C se situe sur le cercle.

Le point M se situe en dehors du cercle, de sorte que le segment AM coupe le segment CO en un point K .

Le point E se situe sur le segment BO de sorte que le quadrilatère $EMKO$ est un cerf-volant [דלתון]

($OK = OE$, $MK = ME$).

א. Démontrez que $BC \parallel EK$.

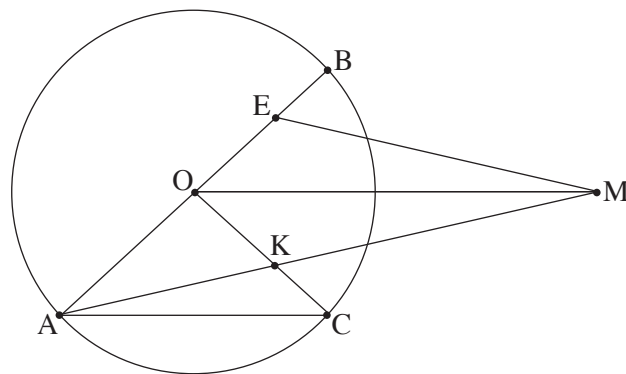
ב. Démontrez que $OM \parallel AC$.

Donnée : $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$

ג. Déterminez la valeur de $\frac{OM}{AC}$.

On note S l'aire du cerf-volant $EMKO$.

ד. Exprimez l'aire du triangle AOC en fonction de S .



5. La figure ci-contre représente un trapèze $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

On sait que la longueur de la base AB est égale à la longueur du côté BC .

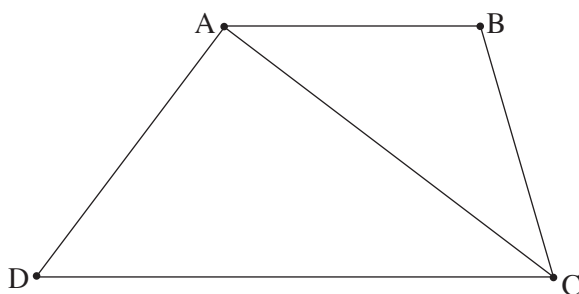
On note : $AB = BC = k$, $\angle ACB = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

א. Montrer que $AC = 2k \cdot \cos \alpha$.

Données : $AD = 1,2k$, $DC = 2k$.

ב. Déterminez la valeur de α .

ג. Déterminez la mesure de l'angle ADC .



Les prolongements des côtés DA et CB se coupent en un point E .

On sait que la longueur du rayon du cercle qui est inscrit dans le triangle EDC vaut 14.

ד. Déterminez la valeur de k .

Quatrième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{ax}{(x-3)^2}$, définie sur l'intervalle $x \neq 3$.

a est un paramètre positif.

⌘. Répondez aux articles (1)-(2). Exprimez vos réponses en fonction de a , si cela est nécessaire.

(1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.

(2) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.

Ⓐ. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = f(x) + 0,5$, définie sur l'intervalle $x \neq 3$.

On sait que le graphe de la fonction $g(x)$ admet un seul point commun avec l'axe des abscisses.

Ⓐ. Déterminez la valeur de a .

Substituez dans la fonction $g(x)$ la valeur de a que vous avez déterminée, puis répondez à l'article 7.

Soit la fonction $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, définie sur l'intervalle $x \neq 3$.

7. (1) Donnez les intervalles sur lesquels la fonction $h(x)$ est positive et les intervalles sur lesquels la fonction $h(x)$ est négative.

(2) Déterminez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $h(x)$ et par l'axe des abscisses sur l'intervalle $-9 \leq x \leq 0$.

7. Soit la fonction $f(x) = (1 + \cos x) \cdot (-1 + b \cos x)$, définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.

b est un paramètre.

Donnée : $0 < b < 1$.

⌘. La fonction $f(x)$ est-elle paire ou impaire ? Justifiez votre réponse.

Ⓐ. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

On sait que la fonction $f(x)$ admet un point d'extremum au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{3}$.

Ⓐ. Déterminez la valeur de b .

Substituez $b = \frac{1}{2}$ dans la fonction $f(x)$, puis répondez aux articles 7-7.

7. (1) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

(2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $h(x) = f(x) + |f(x)|$ définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.

Le point A est un point quelconque qui se trouve sur le graphe de la fonction $h(x)$.

⌘. L'ordonnée du point A est-elle positive, négative, égale à zéro ou bien est-il impossible de le déterminer ? Justifiez votre réponse.

8. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

On donne la droite $y = 3x - 3$.

- א. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- ב. Déterminez les coordonnées des deux points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec la droite donnée.

Le point A se situe sur le graphe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle entre les deux points que vous avez déterminés à l'article ב.

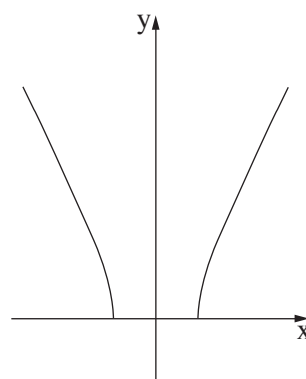
On a tracé deux droites passant par le point A :

une droite parallèle à l'axe des ordonnées et qui coupe la droite donnée en un point B ,

une droite parallèle à l'axe des abscisses et qui coupe la droite donnée en un point C .

On note t l'abscisse du point A .

- א. (1) Exprimez la longueur du segment AB en fonction de t .
(2) Exprimez la longueur du segment AC en fonction de t .
- ב. Déterminez la valeur de t pour laquelle la somme des longueurs des segments AB et AC est maximale.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך