

תוכנית חדשה

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : Trois heures et quarante cinq minutes.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire en quatre parties comporte huit exercices.

Première partie — Exercices courts

Deuxième partie — Récurrence, suites et probabilités

Troisième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Quatrième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez cinq exercices, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties.

$5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les fonctionnalités de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des fonctionnalités de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointés au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — שאלות קצרות

פרק שני — אינדוקציה, סדרות והסתברות

פרק שלישי — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חסור פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez cinq des exercices 1-8, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties (20 points par question).

Attention : si vous résolvez plus de cinq exercices, seuls les cinq premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie — Exercices courts

1. Répondez à deux des quatre articles א-ד ci-dessous. Si vous répondez à plus de deux articles, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

א. Démontrez par récurrence mathématique ou par toute autre méthode, que tout n entier naturel vérifie :

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ב. Yonathan possède dans la bibliothèque de sa chambre deux types de livres :
des bandes dessinées et des livres d'étude.

60 % des livres sont des bandes dessinées et les autres sont des livres d'étude.

70 % des livres sont en hébreu et les autres sont en anglais.

Voici deux affirmations I-II . Déterminez pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse, puis justifiez vos réponses.

I. Yonathan ne possède pas de bandes dessinées en hébreu.

II. La probabilité de choisir au hasard un livre en hébreu parmi les bandes dessinées est supérieure à la probabilité de choisir au hasard une bande dessinée parmi les livres en hébreu.

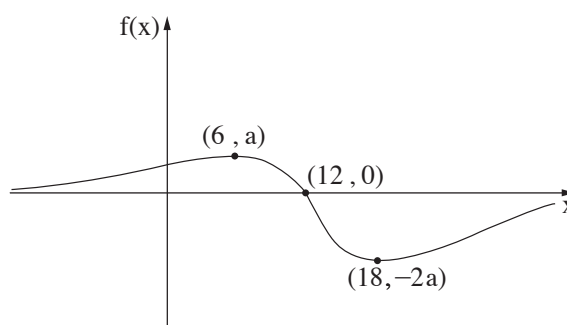
ג. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x)$, définie pour tout x .

La fonction $f(x)$ admet une seule asymptote d'équation $y = 0$,

et un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses de coordonnées $(12, 0)$.

Les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$ apparaissent sur la figure.

a est un paramètre supérieur à 1.



Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$.

(1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.

(2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

On sait que la droite $y = \frac{a}{27}$ et le graphe de la fonction $g(x)$ ont exactement 3 points en commun.

(3) Déterminez la valeur de a .

(suite en page 3)

7. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x) = \frac{-30x^2}{(x^3 - 8)^2}$, définie sur l'intervalle $x \neq 2$.

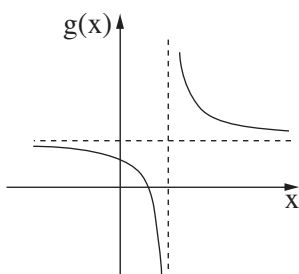
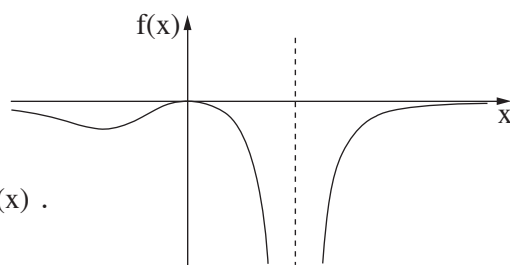
Sur la figure sont représentés tous les points d'extremum et tous les points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

$g(x)$ est une fonction dont la dérivée vérifie $g'(x) = f(x)$.

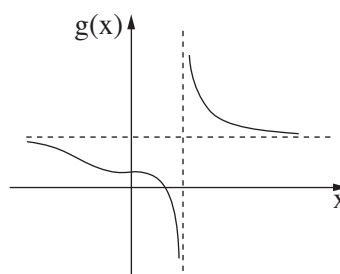
La fonction $g(x)$ est définie sur l'intervalle $x \neq 2$.

On sait que le graphe de la fonction $g(x)$ passe par le point $(0, 0,75)$.

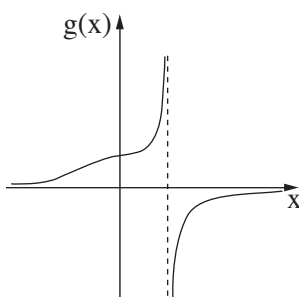
- (1) Déterminez une fonction $g(x)$ qui vérifie ces conditions.
- (2) L'un des graphes I-IV ci-dessous représente une fonction $g(x)$ qui vérifie ces conditions. Déterminez lequel, puis justifiez votre réponse.



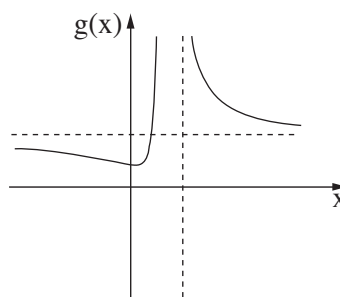
II



I



IV



III

Deuxième partie – Récurrence, suites et probabilités

2. a_n est une suite géométrique infinie croissante de raison q .
 b_n est une suite géométrique infinie croissante de raison $2q$.
 c_n est une suite infinie dont les termes vérifient $c_n = a_n \cdot b_n$ pour tout n entier naturel.
 ⌘. Démontrez que la suite c_n est géométrique, puis exprimez sa raison en fonction de q .

Données : $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$, $a_1 = b_1$.

- ⌘. Déterminez la valeur de q .
 ⌘. (1) La valeur de a_1 est-elle positive ou négative ? Justifiez votre réponse.
 (2) La suite c_n est-elle croissante ou décroissante ? Justifiez votre réponse.

On note S_1 la somme de la suite a_n , S_2 la somme de la suite b_n et S_3 la somme de la suite c_n .

Donnée : $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

- ⌘. Déterminez la valeur de a_1 .

3. Le sac ⌘ et le sac ⌘ contiennent deux types de balles : des balles molles et des balles dures.
 Le sac ⌘ contient 10 balles, parmi lesquelles 4 sont molles et les autres sont dures.
 Le sac ⌘ contient 12 balles, parmi lesquelles x sont molles et les autres sont dures.
 Galith choisit au hasard un sac et en tire une balle au hasard. Ensuite elle remet cette balle dans le sac et tire au hasard une deuxième balle du même sac (tirage avec remise).
 On sait que la probabilité que Galith tire deux balles molles est de $\frac{41}{200}$.
 ⌘. Déterminez la valeur de x .
 ⌘. On sait que Galith a tiré deux balles du même type. Quelle est la probabilité qu'elle ait tiré deux balles du sac ⌘ ?

Galith effectue 4 fois le processus suivant :

Elle choisit au hasard un sac et en tire une balle. Ensuite elle remet la balle dans le sac et tire au hasard une deuxième balle du même sac (tirage avec remise).

- ⌘. Quelle est la probabilité que Galith ait tiré uniquement des balles dures exactement à deux des fois ?
 ⌘. Quelle est la probabilité que Galith ait tiré deux fois uniquement des balles dures et deux fois uniquement des balles molles ?

Troisième partie – Géométrie et trigonométrie dans le plan

4. La figure ci-contre représente un cercle de centre O .

AB est un diamètre du cercle.

Le point C se situe sur le cercle.

Le point M se situe en dehors du cercle, de sorte que le segment AM coupe le segment CO en un point K .

Le point E se situe sur le segment BO de sorte que le quadrilatère $EMKO$ est un cerf-volant [דלתון]

($OK = OE$, $MK = ME$).

א. Démontrez que $BC \parallel EK$.

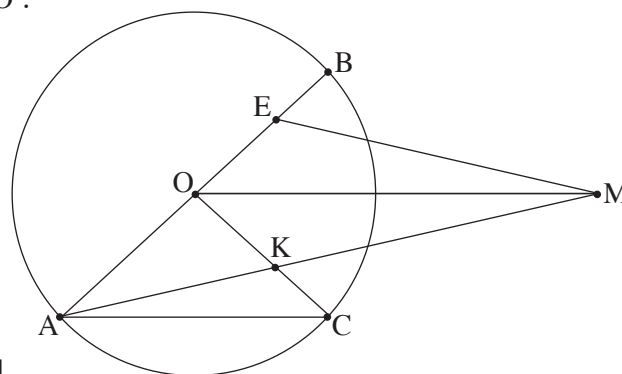
ב. Démontrez que $OM \parallel AC$.

Donnée : $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$

ג. Déterminez la valeur de $\frac{OM}{AC}$.

On note S l'aire du cerf-volant $EMKO$.

ד. Exprimez l'aire du triangle AOC en fonction de S .



5. La figure ci-contre représente un trapèze $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

On sait que la longueur de la base AB est égale à la longueur du côté BC .

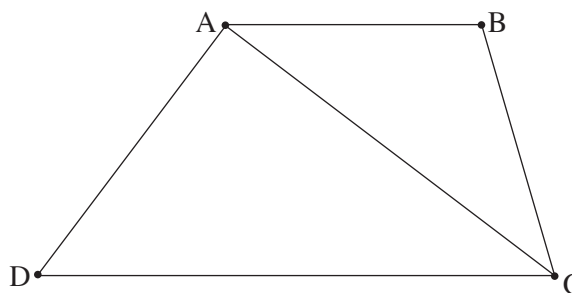
On note : $AB = BC = k$, $\angle ACB = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

א. Montrer que $AC = 2k \cdot \cos \alpha$.

Données : $AD = 1,2k$, $DC = 2k$.

ב. Déterminez la valeur de α .

ג. Déterminez la mesure de l'angle ADC .



Les prolongements des côtés DA et CB se coupent en un point E .

On sait que la longueur du rayon du cercle qui est inscrit dans le triangle EDC vaut 14.

ד. Déterminez la valeur de k .

Quatrième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{ax}{(x-3)^2}$, définie sur l'intervalle $x \neq 3$.

a est un paramètre positif.

⌘. Répondez aux articles (1)-(2). Exprimez vos réponses en fonction de a, si cela est nécessaire.

(1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.

(2) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.

Ⓐ. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = f(x) + 0,5$, définie sur l'intervalle $x \neq 3$.

On sait que le graphe de la fonction $g(x)$ admet un seul point commun avec l'axe des abscisses.

Ⓐ. Déterminez la valeur de a.

Substituez dans la fonction $g(x)$ la valeur de a que vous avez déterminée, puis répondez à l'article 7.

Soit la fonction $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, définie sur l'intervalle $x \neq 3$.

7. (1) Donnez les intervalles sur lesquels la fonction $h(x)$ est positive et les intervalles sur lesquels la fonction $h(x)$ est négative.

(2) Déterminez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $h(x)$ et par l'axe des abscisses sur l'intervalle $-9 \leq x \leq 0$.

7. Soit la fonction $f(x) = (1 + \cos x) \cdot (-1 + b \cos x)$, définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.

b est un paramètre.

Donnée : $0 < b < 1$.

⌘. La fonction $f(x)$ est-elle paire ou impaire ? Justifiez votre réponse.

Ⓐ. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

On sait que la fonction $f(x)$ admet un point d'extremum au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{3}$.

Ⓐ. Déterminez la valeur de b.

Substituez $b = \frac{1}{2}$ dans la fonction $f(x)$, puis répondez aux articles 7-7.

7. (1) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

(2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $h(x) = f(x) + |f(x)|$ définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.

Le point A est un point quelconque qui se trouve sur le graphe de la fonction $h(x)$.

⌘. L'ordonnée du point A est-elle positive, négative, égale à zéro ou bien est-il impossible de le déterminer ? Justifiez votre réponse.

8. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

On donne la droite $y = 3x - 3$.

- א. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- ב. Déterminez les coordonnées des deux points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec la droite donnée.

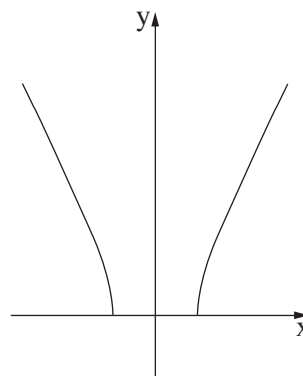
Le point A se situe sur le graphe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle entre les deux points que vous avez déterminés à l'article ב.

On a tracé deux droites passant par le point A :

une droite parallèle à l'axe des ordonnées et qui coupe la droite donnée en un point B ,
une droite parallèle à l'axe des abscisses et qui coupe la droite donnée en un point C .

On note t l'abscisse du point A .

- א. (1) Exprimez la longueur du segment AB en fonction de t .
(2) Exprimez la longueur du segment AC en fonction de t .
- ב. Déterminez la valeur de t pour laquelle la somme des longueurs des segments AB et AC est maximale.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך