

Mathématiques

5 unités d'étude – deuxième questionnaire

Instructions

- א. Durée de l'examen : deux heures et demie.
- ב. Structure du questionnaire et barème de notation :
Ce questionnaire en deux parties comporte cinq questions.
Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.
Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.
Résolvez trois exercices dont au moins un exercice de chaque partie — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ points
- ג. Matériel auxiliaire autorisé :
(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les fonctionnalités de programmation d'une calculatrice programmable.
L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des fonctionnalités de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
(2) Formulaire (joint au sujet).
(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

- ד. Instructions supplémentaires :
(1) Ne recopiez pas l'exercice, indiquez seulement son numéro.
(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide d'une calculatrice.
Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement.
Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.
Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

- א. משך הבחינה: שתיים וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.
כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez trois des exercices 1-5, au moins un exercice de chaque partie ($33\frac{1}{3}$ points par exercice).

Attention : si vous résolvez plus de trois exercices, seuls les trois premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes

1. Soit une ellipse d'équation canonique. Le point $A(1, 3)$ se situe sur cette ellipse.

Les coordonnées du foyer droit de l'ellipse sont $(\sqrt{6}, 4, 0)$.

⌘ Déterminez l'équation de l'ellipse.

Le point B est le point d'intersection de l'ellipse avec la partie positive de l'axe des abscisses.

À partir du point A , on trace une droite passant par le point O , l'origine du repère.

Le point C est un point quelconque situé sur la droite AO . Le point P est le milieu du segment BC .

⌘ Déterminez l'équation du lieu géométrique de tous les points P .

⌘ Déterminez l'équation du cercle qui est tangent au lieu géométrique que vous avez déterminé et qui est tangent à la droite AO au point O .

2. La figure ci-contre représente un pavé $ABCD A'B'C'D'$.

On sait que l'équation du plan $A'B'C'D'$ est $x + 4y - 8z - 142 = 0$,

et que $B(0, 7, 6)$.

⌘ Déterminez la longueur de l'arête BB' .

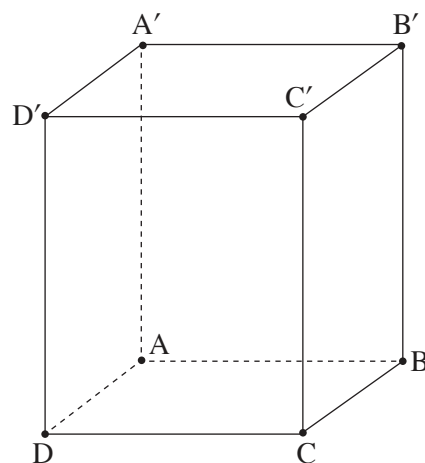
On sait qu'une représentation paramétrique de la droite AB

est $\underline{x} = (0, 7, 6) + t(0, 2, 1)$.

La longueur de l'arête AB vaut $5\sqrt{5}$, et l'ordonnée du sommet A est négative.

⌘ Déterminez les coordonnées du sommet A .

⌘ Déterminez l'équation du plan $ABB'A'$.



Soit le point $M(k, 1, 3)$, k est un paramètre positif.

On sait que la mesure de l'angle entre la droite AB et la droite AM vaut 60° .

⌘ Déterminez la valeur de k (vous pourrez laisser une racine dans votre réponse).

On sait que le point M se situe sur le plan $DCC'D'$.

- 05 ⌘ Déterminez le volume du pavé.

/suite en page 3/

3. א. Montrez que le lieu géométrique de tous les points $z = x + iy$ dans le plan de Gauss qui vérifient $|z - 2i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 2$ est une parabole, puis déterminez son équation.

Soit un nombre complexe $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $r > 0$.

Soit un polygone convexe I , dont les sommets représentent les solutions de

$$l'équation \quad z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)).$$

z est une variable complexe.

- א. Exprimez en fonction de r et de θ , une représentation polaire de tous les nombres qui sont représentés par les sommets du polygone I .

Soit un polygone II dont les sommets représentent les nombres $-\frac{1}{w}$, $\frac{1}{w}$, $-w$, w .

- א. Exprimez en fonction de r et de θ , une représentation polaire de tous les nombres qui sont représentés par les sommets du polygone II .

On sait que le polygone II est un losange.

- א. Déterminez la valeur de θ .

On sait que le point qui représente w se situe sur le lieu géométrique que vous avez déterminé à l'article א.

- א. Déterminez le rapport entre l'aire du polygone II et l'aire du polygone I .

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions exponentielles et logarithmiques

4. $f'(x)$ est la fonction dérivée de la fonction $f(x)$.

$g(x)$ est une fonction qui vérifie $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

Les fonctions $f(x)$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont définies sur l'intervalle $x \neq 0$.

On sait que la fonction $f(x)$ est décroissante sur l'intervalle $x > 0$ et sur l'intervalle $x < 0$,

et que $f'(x) \neq 0$ sur tout son domaine de définition.

א. Écrivez les intervalles sur lesquels la fonction $g(x)$ est positive et les intervalles sur lesquels elle est négative (s'il en existe). Justifiez votre réponse.

On donne : $f(x) = \frac{1}{x}$.

א. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $g(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.

(2) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $g(x)$, puis déterminez son type.

א. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

a est un paramètre supérieur à 1.

On sait que l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses et par les

droites $x = \frac{1}{\ln a}$ et $x = \frac{1}{\ln(4a)}$ vaut 5.

א. Déterminez la valeur de a .

5. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x} \left(a + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$. a est un paramètre positif.

א. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

On sait que la fonction $f(x)$ admet un seul point d'extremum au point d'abscisse $x = \frac{1}{e}$.

ב. Déterminez la valeur de a .

Substituez $a = 1$ dans la fonction $f(x)$, puis répondez aux articles ג-ו.

$g(x)$ est une fonction dont la dérivée vérifie $g'(x) = f(x)$.

Le domaine de définition de la fonction $g(x)$ est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$.

On sait que la fonction $g(x)$ admet un point d'inflexion qui se trouve sur l'axe des abscisses.

ג. Déterminez la fonction $g(x)$ qui vérifie ces conditions.

Répondez aux articles ד-ו pour la fonction $g(x)$ que vous avez déterminée.

ד. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $g(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).

(2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $g(x)$ avec l'axe des abscisses.

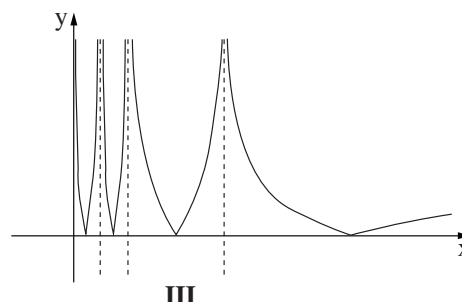
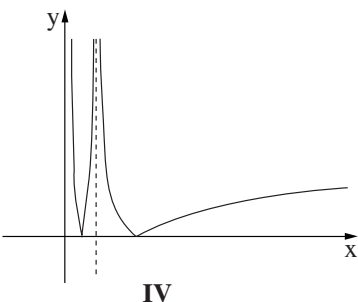
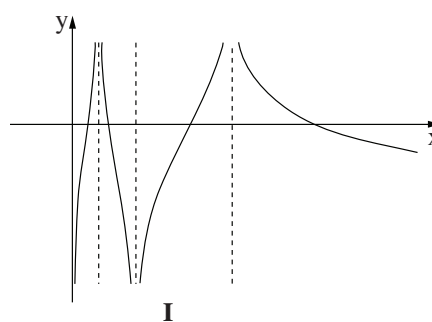
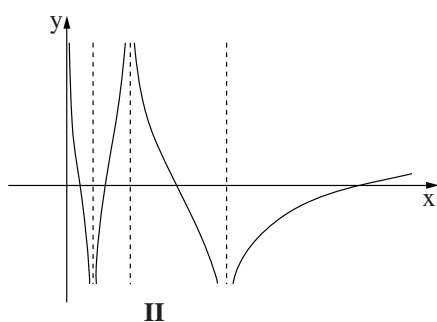
(3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $g(x)$ (s'il en existe).

ה. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

Soit la fonction $h(x) = \ln |g(x)|$.

ו. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $h(x)$.

(2) Un des graphes I-IV ci-dessous représente la fonction $h(x)$. Déterminez lequel, puis justifiez votre réponse.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך