

תוכנית חדשה

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : trois heures et quarante cinq minutes.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire en quatre parties comporte huit exercices.

Première partie — Exercices courts

Deuxième partie — Récurrence, suites et probabilités

Troisième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Quatrième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez cinq exercices, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties.

$5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les fonctionnalités de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des fonctionnalités de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointés au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — שאלות קצרות

פרק שני — אינדוקציה, סדרות והסתברות

פרק שלישי — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.
 $100 = 20 \times 5$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez cinq des exercices 1-8, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties (20 points par question).

Attention : si vous résolvez plus de cinq exercices, seuls les cinq premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie — Exercices courts

1. Répondez à deux des quatre articles א-ד ci-dessous. Si vous répondez à plus de deux articles, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

א. La figure ci-contre représente un cercle de centre O et de rayon R .

On trace deux tangentes passant par les points A et E et qui sont perpendiculaires entre elles.

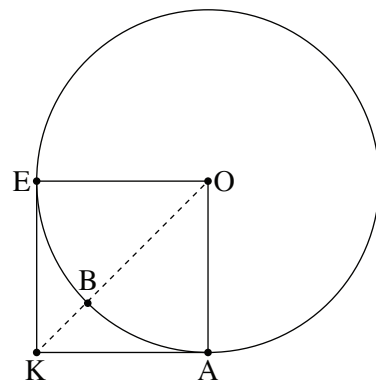
Les tangentes se coupent en un point K .

Le segment KO coupe le cercle en un point B .

- (1) Déterminez de combien de fois l'aire du triangle AOB est supérieure à l'aire du triangle AKB .

On sait que l'aire du triangle AOB vaut 16.

- (2) Déterminez la longueur de la hauteur relative au côté AK dans le triangle AKB .



ב. Lors d'une compétition d'échecs, deux joueurs, Yaïr et Nadav, jouent l'un contre l'autre.

Chaque partie peut se conclure par l'un des trois résultats suivants : une victoire de Yaïr, une victoire de Nadav ou une égalité.

À chaque partie, la probabilité que Yaïr gagne est fixe et 2 fois supérieure à la probabilité que Nadav gagne.

On note p la probabilité que Nadav gagne une partie.

Yaïr et Nadav jouent deux parties.

- (1) Exprimez en fonction de p la probabilité que l'un des joueurs obtienne deux victoires.

On sait que si aucun joueur n'a obtenu deux victoires, la probabilité que chacune des parties se conclue par une égalité est de $\frac{9}{31}$.

- (2) Déterminez laquelle des possibilités I–III ci-dessous correspond à la valeur de p .

Justifiez votre réponse.

I. $\frac{1}{10}$

II. $\frac{11}{27}$

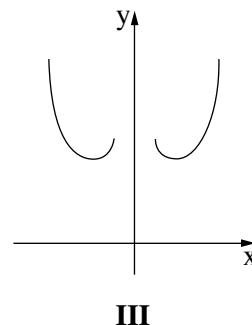
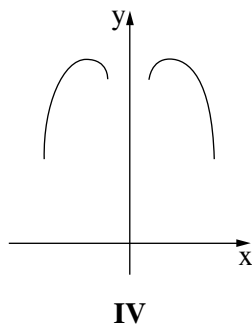
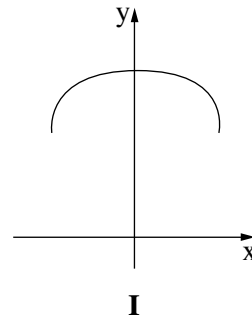
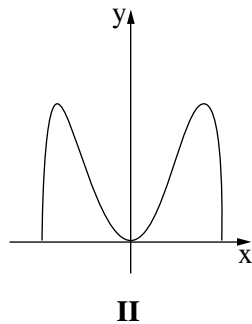
III. $\frac{1}{6}$

ג. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{16 - x^2}$.

(1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

(2) L'un des graphes I–IV ci-dessous représente la fonction $f(x)$.

Déterminez lequel puis justifiez votre réponse.



ד. Soit une suite infinie dont les termes vérifient $a_n = \frac{\cos(\pi \cdot 2^n)}{5 \cdot 2^n}$ pour tout n entier naturel.

(1) Déterminez les trois premiers termes de la suite a_n .

(2) Démontrez que a_n est une suite géométrique, puis déterminez sa raison.

(3) Déterminez la somme de la suite a_n .

Deuxième partie – Récurrence, suites et probabilités

2. a_n est une suite géométrique infinie décroissante dont la somme est convergente.

La raison de cette suite est q .

On note T la somme des termes situés aux emplacements impairs de la suite,

et on note R la somme des termes situés aux emplacements pairs de la suite.

Données : $\frac{T^2}{R^2} = 16$.

- א. Déterminez la valeur de q .

Soit la suite b_n dont les termes vérifient $b_n = \frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ pour tout n entier naturel.

Données : $b_1 = 1$.

- א. Déterminez la valeur de a_1 .

- ב. Exprimez b_n en fonction de n .

- ג. Démontrez par récurrence ou par tout autre méthode, que tout n entier naturel vérifie :

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{16^n - 1}{15}.$$

3. Dans les classes de א"ז d'un grand lycée municipal, une partie des élèves sont moniteurs dans un mouvement de jeunesse et les autres élèves ne sont pas moniteurs.

Dans ces classes, une partie des élèves ont le permis de conduire et les autres élèves n'ont pas le permis de conduire.

La moitié des élèves qui ont le permis de conduire sont moniteurs dans un mouvement de jeunesse.

Le pourcentage des élèves qui sont moniteurs parmi les élèves qui ont le permis de conduire est égal au pourcentage des élèves qui n'ont pas le permis de conduire parmi les élèves qui sont moniteurs.

On choisit au hasard un élève parmi les élèves de ces classes.

La probabilité que l'élève choisi soit moniteur ou qu'il ait le permis de conduire est de 0,45.

- א. Déterminez quel pourcentage des élèves de ces classes sont moniteurs.

- ב. On choisit au hasard un élève parmi les élèves qui n'ont pas le permis de conduire.

Quelle est la probabilité que cet élève soit moniteur ?

On choisit au hasard 5 élèves parmi les élèves qui n'ont pas le permis de conduire.

- א. (1) Quelle est la probabilité que l'on ait choisi plus d'un moniteur ?

- (2) On sait que plus d'un moniteur a été choisi. Quelle est la probabilité que le nombre de moniteurs choisis soit pair ?

Troisième partie – Géométrie et trigonométrie dans le plan

4. La figure ci-contre représente un triangle obtusangle ABC inscrit dans un cercle.

Le point K se situe sur le prolongement du côté AB ,
de sorte que $AB = BK$.

Le prolongement du segment KC coupe le cercle en un
point supplémentaire F .

Donnée : $\angle BAC = \angle BCA$.

⌘. Démontrez que AF est un diamètre du cercle.

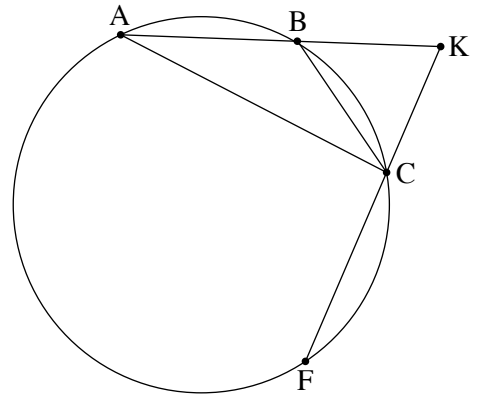
Les cordes BF et AC se coupent en un point D .

Ⓐ. Démontrez que le triangle ADK est isocèle.

ⓐ. (1) Démontrez que le quadrilatère $BDCK$ peut être inscrit dans un cercle.

(2) Démontrez que $\angle DKC = \angle FAC$.

ⓑ. Démontrez que $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.



5. La figure ci-contre représente un cerf-volant $[ABCD]$ ($AB = AD$, $CB = CD$).

Données : $\angle BAD = \angle CDB = 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

On note : $AB = k$.

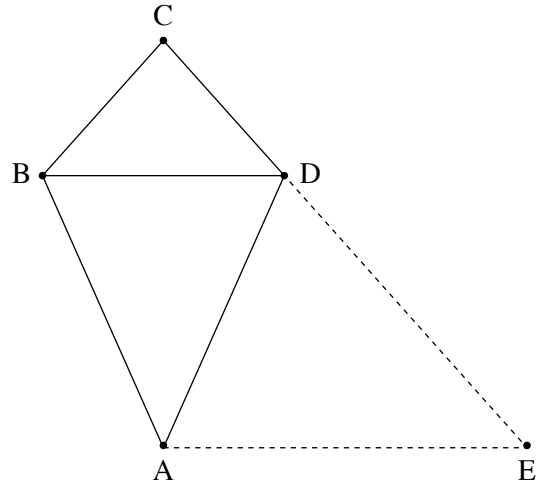
⌘. Exprimez en fonction de k et de α , le rayon du
cercle dans lequel le triangle CDB est inscrit.

On sait que le rayon du cercle dans lequel le triangle ABD

est inscrit est $\frac{4}{3}$ fois supérieur au rayon du cercle

dans lequel le triangle CDB est inscrit.

Ⓐ. Déterminez la mesure de l'angle BAD .



Le point O est le centre du cercle dans lequel le
triangle ABD est inscrit.

On a tracé une droite parallèle à BD qui passe par le point A et qui coupe le prolongement du
côté CD en un point E .

On sait que l'aire du triangle AOE vaut 70 .

ⓐ. Déterminez la valeur de k .

Quatrième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - kx}}{x^3}$, k est un paramètre positif.

א. Exprimez le domaine de définition de la fonction $f(x)$ en fonction de k .

Soit la fonction $h(x) = -f(x)$.

L'abscisse du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec le graphe de la fonction $h(x)$ vaut 1,6.

ב. Déterminez la valeur de k .

Substituez $k = 8$ dans la fonction $f(x)$, puis répondez aux articles ג-ג.

ג. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.

(2) Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

(3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = (f(x))^2$ dont le domaine de définition est identique à celui de la fonction $f(x)$.

ד. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

a est un paramètre supérieur à 2.

ה. La valeur de l'expression $\int_a^{a+1} g(x) dx$ est-elle égale, supérieure ou inférieure à la valeur de l'expression $\int_a^{a+1} f(x) dx$? Justifiez votre réponse.

ו. Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = 2$ et $x = 6$.

7. Soit la fonction $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$, définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. Démontrez que la fonction $f(x)$ est paire.

א. (1) Déterminez les coordonnées des points d'intersection de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

(2) Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

א. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$, b est un paramètre.

On sait que la fonction $g(x)$ admet exactement deux asymptotes verticales.

א. Écrivez deux valeurs possibles de b , dont l'une sera positive et l'autre négative.

Dans la fonction $g(x)$, substituez la valeur négative de b que vous avez déterminée, puis répondez aux articles ה-ו.

ה. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.

(2) Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $g(x)$, puis déterminez leur type.

ו. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

8. Soit la fonction $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$ définie pour tout x .

k est un paramètre différent de 0.

Le point A est le point d'inflexion de la fonction $f(x)$.

א. Exprimez les coordonnées du point A en fonction de k .

On sait que le point A se situe dans le premier quadrant.

א. Déterminez l'intervalle des valeurs possibles de k .

À partir du point A, on a tracé une perpendiculaire à l'axe des abscisses qui le coupe en un point B, et une perpendiculaire à l'axe des ordonnées qui le coupe en un point C.

Soit le carré I dont la longueur du côté est égale à la longueur du segment AB et le carré II dont la longueur du côté est égale à la longueur du segment AC.

א. Déterminez la valeur de k pour laquelle la somme des aires des carrés I et II est minimale (vous pourrez laisser une racine dans votre réponse).

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך