

תוכנית חדשה

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

מ ת מ ט י ק ה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח הערכה:
בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – שאלות קצרות
פרק שני – אינדוקציה, סדרות והסתברות
פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.
 $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- ה. הוראות מיוחדות:
1. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

- ב. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – короткие вопросы
Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей
Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости
Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций
Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого. $5 \times 20 = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתובת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на два из четырех пунктов (а)–(г), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два ответа в вашей тетради.

(а) Докажите методом математической индукции или любым другим способом, что для любого натурального n выполняется:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4n-2}{3^n} = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

(б) На чертеже справа приведены трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) и трапеция $BCDE$ ($CD \parallel BE$).

Точка M – точка пересечения сторон AD и BE .

Дано: $EM = BM$, $ED \perp AD$, $AB \perp BM$.

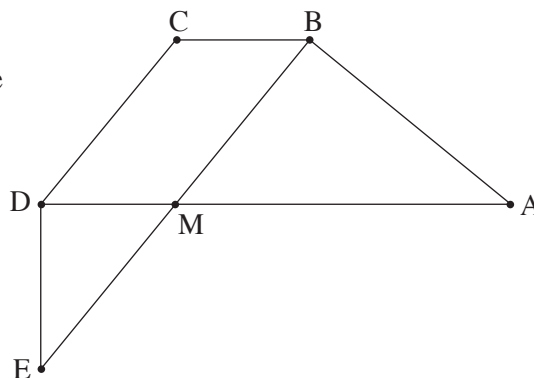
Длина отрезка AM в 2.5 раза больше длины отрезка DM .

Обозначим: $\angle EMD = \alpha$.

(1) Найдите значение α .

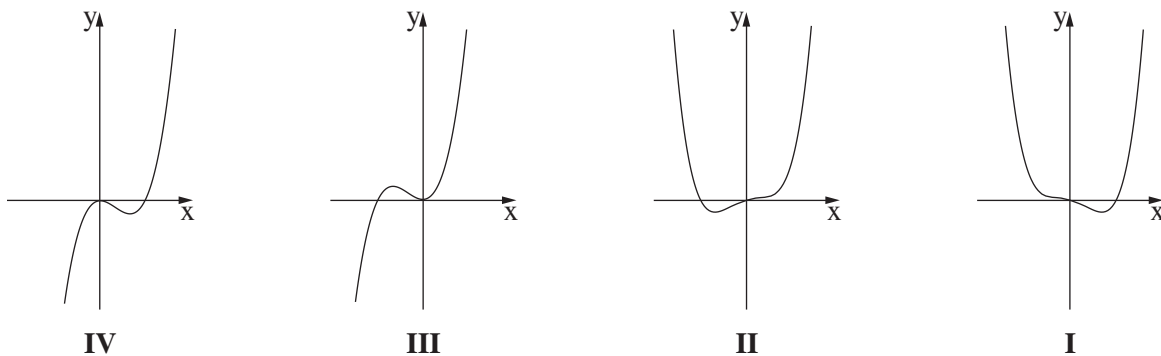
Дано: $DM = 4$.

(2) Вычислите площадь трапеции $ABCD$.



- (ג) Даны функции $f(x) = x^n(x-1)$ и $g(x) = x^n(x+1)$, определенные для любого x .
 n – натуральный параметр, больше чем 1.

Каждый из приведенных графиков I–IV соответствует одной из функций $f(x)$ или $g(x)$ при четном n или нечетном n .



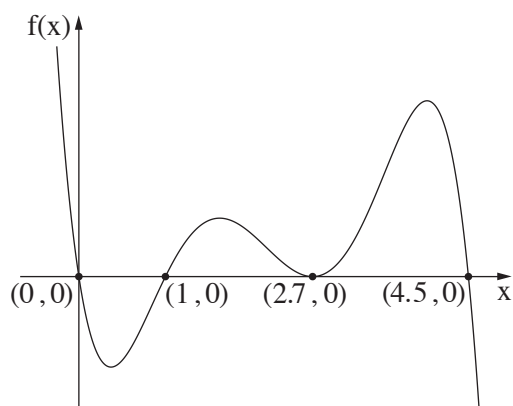
- (1) Для каждого из графиков I–IV найдите соответствующую ему функцию $f(x)$ или $g(x)$ при четном n или нечетном n .
 (2) Подставьте $n = 4$ и вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$ и осью x .

- (г) На чертеже справа изображен график функции $f(x)$, определенной для любого x .

На чертеже обозначены все координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

Функция $g(x)$ определена в области $x \geq 0$,
 и для нее выполняется $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (1) Найдите координаты x точек экстремума функции $g(x)$ и определите их тип.



Обозначим через S площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью x на интервале $1 \leq x \leq 2.7$.

Дано: $g(2.7) = 0$, $g(4.5) = 3 \cdot S$.

- (2) Выразите при помощи S площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью x на интервале $0 \leq x \leq 4.5$.

Раздел второй – индукция, последовательности и теория вероятностей

2. a_n – бесконечно возрастающая геометрическая прогрессия со знаменателем q .

$$0 < q < 1.$$

(**к**) Определите, положительны или отрицательны все члены прогрессии a_n . Обоснуйте свой ответ.

b_n – бесконечная геометрическая прогрессия, и ее знаменатель тоже равен q .

c_n – бесконечная прогрессия, в которой для любого натурального n выполняется

$$c_n = 2b_n - a_n \quad (c_n \neq 0).$$

(**а**) Докажите, что прогрессия c_n – геометрическая, и выразите ее знаменатель при помощи q .

Известно, что $c_1 = 5\frac{2}{3}$ и что сумма членов прогрессии c_n в 17 раз больше суммы членов прогрессии b_n .

(**а**) Найдите значение a_1 .

Известно, что сумма членов прогрессии a_n с четными номерами на 4 больше суммы членов прогрессии a_n с нечетными номерами.

(**т**) Найдите значение q .

3. На крупном упаковочном предприятии упаковывают только два вида фруктов: лимоны и апельсины.

Часть фруктов предназначена для экспорта, а остальные фрукты не предназначены для экспорта.

Вероятность случайным образом выбрать два апельсина из числа всех фруктов на упаковочном предприятии составляет 0.4096.

Случайным образом выбирают один фрукт из числа всех фруктов на упаковочном предприятии.

(**к**) Какова вероятность того, что был выбран лимон?

Вероятность случайным образом выбрать апельсин из числа фруктов, предназначенных для экспорта, составляет $\frac{3}{5}$.

Вероятность случайным образом выбрать лимон из числа фруктов, не предназначенных для экспорта, составляет $\frac{4}{15}$.

Случайным образом выбирают один фрукт из числа всех фруктов на упаковочном предприятии.

(**а**) Какова вероятность, что был выбран фрукт, предназначенный для экспорта?

Случайным образом выбирают два фрукта из числа всех фруктов на упаковочном предприятии.

(**а**) Известно, что было выбрано 2 лимона. Какова вероятность, что один из них предназначен для экспорта, а второй не предназначен для экспорта?

Случайным образом выбирают 4 фрукта из числа всех фруктов на упаковочном предприятии. Известно, что, по меньшей мере, один из них предназначен для экспорта.

- 05 (**т**) Какова вероятность, что не более 3 из выбранных фруктов предназначены для экспорта?

/продолжение на странице 5/

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. АВ – диаметр окружности с центром О .

Хорда СК пересекает радиус АО в точке Е
 (смотрите чертеж).

Дано: $\angle EKO = \angle ABK$.

- (а) Докажите, что $\triangle ACE \sim \triangle OKE$.

Продолжение отрезка КО пересекает хорду СВ в точке Р .

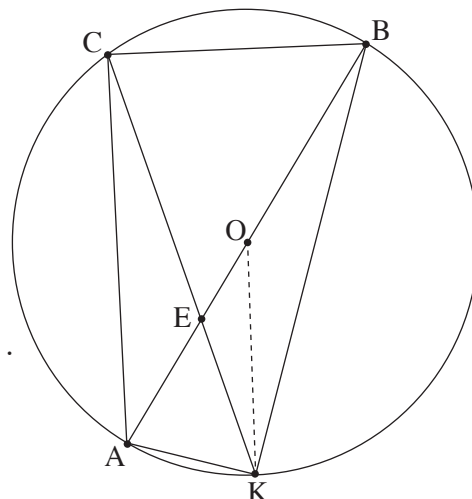
Дано, что $PO = 4$ и радиус данной окружности равен 4.8 .

- (б) (1) Докажите, что РО – это средняя линия

треугольника АВС .

- (2) Найдите длину отрезка ЕО .

- (в) Найдите отношение площади треугольника АСЕ к площади треугольника АОК .



5. На чертеже справа изображен прямоугольный треугольник АВС ($\angle ABC = 90^\circ$).

На стороне АС построили такой треугольник АCD ,

что АС – биссектриса угла BAD .

Обозначим: $AB = k$, $\angle CAB = \alpha$.

- (а) Выразите при помощи k и α длину стороны АС .

Дано: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.

- (б) Вычислите значение α .

Подставьте $\alpha = 60^\circ$ и ответьте на вопросы пунктов (в)–(г).

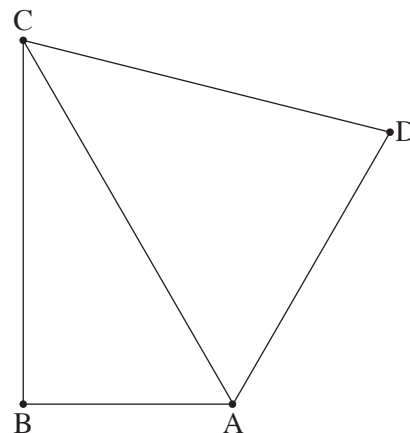
Точка М – центр окружности, вписанной в треугольник АВС .

- (в) Выразите при помощи k радиус окружности, вписанной в треугольник АВС .

Точка Е – центр окружности, описанной вокруг треугольника АВС .

Дано: $ME = 6$.

- (г) Вычислите значение k .



Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{2ax}{(x^2 - 16)^2}$, a – положительный параметр.

- (8) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$.
- (4) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x)$, производной которой является $g'(x) = f(x) + 1$.

Область определения функции $g(x)$ и производной $g'(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

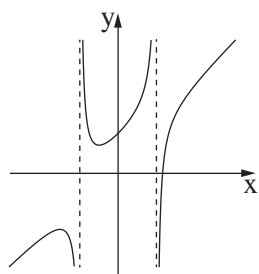
Известно, что у функции $g(x)$ есть точка экстремума в точке $x = -2$.

(2) Найдите значение a .

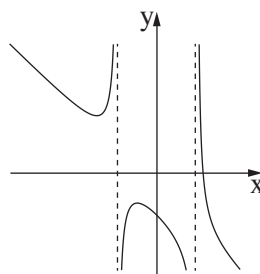
Подставьте найденное вами значение a в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (3)–(7).

Известно, что график функции $g(x)$ проходит через точку $(2, 7)$.

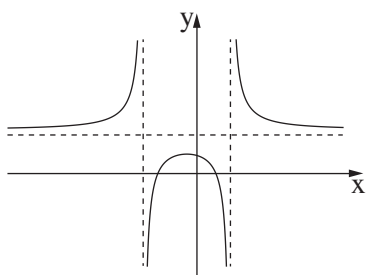
- (3) Напишите возможное алгебраическое выражение для функции $g(x)$.
- (7) Определите, какой из приведенных графиков I–IV может быть графиком функции $g(x)$. Обоснуйте свой ответ.



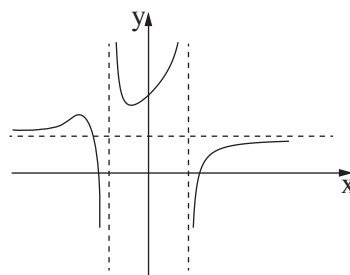
II



I



IV



III

7. Дана функция $f(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ на интервале $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- (*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных оси x .
- (*) (3) Определите, функция $f(x)$ четная или нечетная. Обоснуйте свой ответ.
- (3) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (7) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ на интервале $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- (7) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.
- (2) Покажите, что $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ для любого x в области ее определения.
- (3) Существует ли значение k , для которого прямая $y = k$ пересекает график функции $g(x)$ ровно в 3 точках? Если да, найдите его. Если нет, обоснуйте свой ответ.

8. На чертеже справа представлен график функции $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

R – положительный параметр.

Функция $f(x)$ определена в области $-R \leq x \leq R$.

Точка A лежит на графике функции $f(x)$

в первом квадранте.

Через точку A провели прямую, параллельную

оси x и пересекающую график функции $f(x)$

в дополнительной точке – B .

Точки C и D – такие точки на оси x , что образуется прямоугольник $ABCD$.

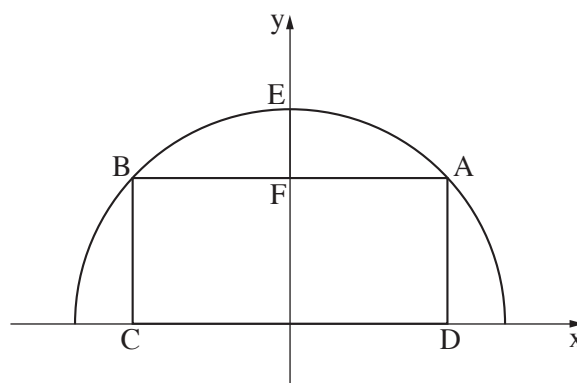
Точка F – точка пересечения стороны AB с осью y .

Точка E – точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью y .

Дан квадрат, длина стороны которого равна длине отрезка EF .

Обозначим через t координату x точки A .

- (*) (1) Выразите при помощи R и t длину отрезка EF .
- (2) Выразите при помощи R и t периметр прямоугольника $ABCD$.
- (*) (3) Выразите при помощи R значение t , для которого разность между периметром прямоугольника $ABCD$ и периметром данного квадрата является наибольшей.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.