

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Résolvez les exercices en suivant ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude – deuxième questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : deux heure et quarante cinq minutes.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire, qui comporte deux parties, est constitué de cinq exercices.

Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.

Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissances, fonctions exponentielles et logarithmiques.

Résolvez trois exercices dont au moins un exercice issu de chaque partie — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ points.

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.
L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (joint au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas l'exercice, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.
Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.
Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שעתיים וארבעים וחמש דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

יש לענות על שלוש שאלות, על שאלה אחת לפחות מכל פרק

$$— 3 \times 33\frac{1}{3} = 100 \text{ נקודות.}$$

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Exercices

Résolvez trois des exercices 1-5, dont au moins un exercice de chaque partie ($33\frac{1}{3}$ points par exercice).

Attention : si vous résolvez plus de trois exercices, seuls les trois premiers exercices de votre cahier seront corrigés.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes

1. Soit une ellipse dont l'équation est $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$. k est un paramètre positif.

Le point F est le foyer droit de l'ellipse.

Soit un cercle de centre F passant par le point d'intersection de l'ellipse avec la partie positive de l'axe des abscisses.

א. Exprimez l'équation du cercle en fonction de k .

Le point B est le point d'intersection de l'ellipse avec la partie positive de l'axe des ordonnées.

Le point D est le point d'intersection du segment BF avec le cercle.

א. (1) Déterminez le rapport entre le segment BD et le segment DF .

(2) Exprimez les coordonnées du point D en fonction de k .

א. Exprimez l'équation de la tangente au cercle au point D en fonction de k .

On construit un carré dont la longueur du côté est 15.

L'un des côtés du carré se situe sur la tangente dont vous avez déterminé l'équation à l'article א.

Le point B se situe à l'intérieur du carré.

א. Exprimez en fonction de k l'équation de la droite sur laquelle se trouve le côté du carré qui est parallèle à la tangente.

On sait que le point B est le point d'intersection des diagonales du carré.

א. Déterminez la valeur de k .

2. La figure ci-contre représente un prisme droit $AOBA'O'B'$ dont la base AOB est un triangle rectangle, $\angle AOB = 90^\circ$.

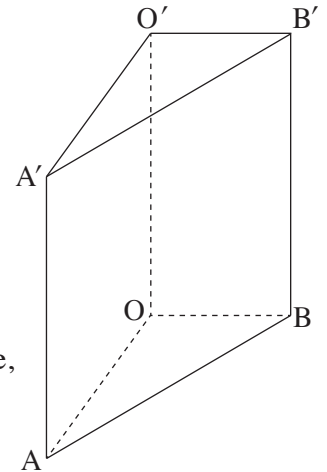
Le point K est le milieu de l'arête AB .

Le point E se situe sur le segment $O'B$ de sorte que $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Le point N se situe sur le segment AE de sorte que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AE}$.

On note $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OO'} = \underline{w}$.

- ⌘. (1) Exprimez le vecteur $\overrightarrow{O'N}$ en fonction de $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$.
 (2) Démontrer que les points O' , N et K se situent sur une même droite, puis déterminez le rapport entre $O'K$ et $O'N$.



Données : $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $E(0, 1, 6)$.

Le sommet B se situe sur la partie positive de l'axe des ordonnées, et le sommet O' se situe sur la partie positive de l'axe des cotes (axe z).

- Ⓐ. Déterminez les coordonnées des points N et B .
 Ⓐ. Déterminez l'équation du plan $A'KB'$.
 7. (1) Déterminez la distance entre le point N et le plan $A'KB'$.
 (2) Déterminez le volume de la pyramide $NA'KB'$.

3. Soit deux nombres complexes z_1 et z_2 dont le produit vaut $-19 + 4i$.

$$z_1 = 2 + 3i.$$

- ⌘. Déterminez le nombre z_2 .

Soit l'équation $w^3 = z_1 + z_2$, w est une variable complexe.

- Ⓐ. Déterminez les solutions de cette équation.

Soit un nombre complexe $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

On sait que les nombres z et z^3 se situent sur une même droite qui passe par l'origine du repère.

- Ⓐ. Déterminez les quatre valeurs possibles du nombre z .

Les solutions de l'équation que vous avez déterminées à l'article Ⓐ et les quatre nombres que vous avez déterminés à l'article Ⓐ représentent tous les sommets d'un polygone convexe dans le plan de Gauss.

7. (1) Tracez ce polygone dans un repère.
 (2) Calculez l'aire de ce polygone.

Soit un nombre complexe $3(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

On multiplie chacun des nombres représentant les sommets du polygone par ce nombre complexe de manière à former un nouveau polygone.

- ⌘. Déterminez combien de fois l'aire du nouveau polygone est supérieure à l'aire du polygone que vous avez déterminée à l'article 7.

/suite en page 4/

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques

4. Soit la fonction $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$ définie pour tout x .

b est un paramètre.

א. Répondez aux sous-articles (1)–(3). Exprimez vos réponses en fonction de b , si cela est nécessaire.

(1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.

(2) Déterminez les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des ordonnées.

(3) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.

On sait que la fonction $f(x)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1,5$.

א. Déterminez la valeur de b (déterminez les deux possibilités).

Substituez dans la fonction $f(x)$ la plus petite valeur de b que vous avez déterminée puis répondez aux articles ג–ה.

א. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

On sait que le point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des ordonnées est l'un des deux points d'inflexion de la fonction $f(x)$.

La fonction dérivée $f'(x)$ est définie pour tout x .

ב. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction dérivée $f'(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).

(2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$.

ג. Voici une affirmation : $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1}$.

Cette affirmation est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

5. Soit la fonction $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez l'équation de l'asymptote de la fonction $f(x)$ qui est perpendiculaire à l'axe des abscisses.
- (3) Déterminez les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.
- ב. Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).
- ג. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

- ד. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction dérivée $g(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

Soit l'expression $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k est un paramètre supérieur à 1.

- ה. (1) Déterminez laquelle des expressions I-II est égale à la valeur de l'expression donnée. Justifiez votre réponse.
- I. $k + \ln(k)$ II. $k + \ln 2$
- (2) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = e^3$ et $x = e^6$.

Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך