

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Résolvez les exercices en suivant ces instructions.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : quatre heures et quart.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire en quatre parties comporte huit exercices.

Première partie — Exercices courts

Deuxième partie — Récurrence, suites et probabilités

Troisième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Quatrième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez cinq exercices, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties.

$5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les fonctionnalités de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des fonctionnalités de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointés au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — שאלות קצרות

פרק שני — אינדוקציה, סדרות והסתברות

פרק שלישי — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חסור פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez cinq des exercices 1-8, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties (20 points par question).

Attention : si vous résolvez plus de cinq exercices, seuls les cinq premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie — Exercices courts

1. Répondez à deux des quatre articles א-ד ci-dessous. Si vous répondez à plus de deux articles, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

א. Démontrez par récurrence ou par toute autre méthode, que tout n entier naturel vérifie :

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4n-2}{3^n} = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

ב. La figure ci-contre représente le trapèze ABCD ($BC \parallel AD$) et le trapèze BCDE ($CD \parallel BE$).

Le point M est le point d'intersection des côtés AD et BE.

Données : $EM = BM$, $ED \perp AD$, $AB \perp BM$.

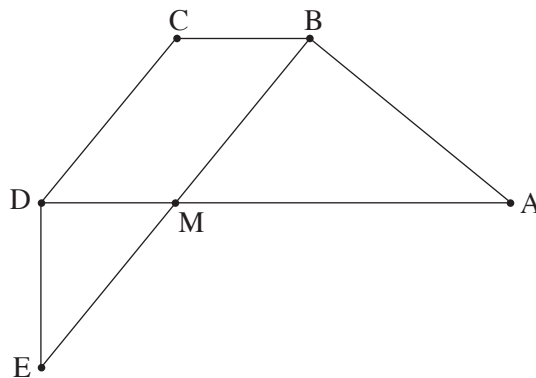
La longueur du segment AM est 2,5 fois supérieure à la longueur du segment DM.

On note : $\angle EMD = \alpha$.

(1) Déterminez la valeur de α .

Donnée : $DM = 4$.

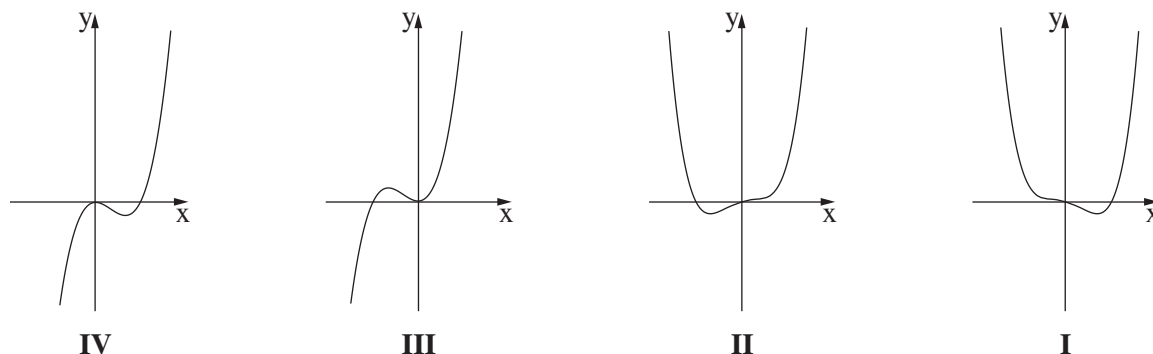
(2) Calculez l'aire du trapèze ABCD.



- ג. Soit les fonctions $f(x) = x^n(x-1)$ et $g(x) = x^n(x+1)$, définies pour tout x .

n est un paramètre entier naturel supérieur à 1.

Chacun des graphes I-IV ci-dessous représente l'une des fonctions $f(x)$ ou $g(x)$ pour n pair ou n impair.



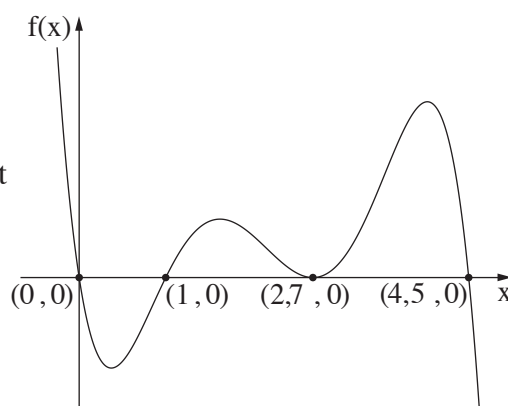
- (1) Faites correspondre chacun des graphes I-IV à la fonction $f(x)$ ou $g(x)$ qui lui correspond pour n pair ou n impair.
- (2) Substituez $n = 4$, puis calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses.

7. La figure ci-contre représente la fonction $f(x)$ définie pour tout x .

Sur cette figure, toutes les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses sont indiquées.

La fonction $g(x)$ est définie sur l'intervalle $x \geq 0$, et

vérifie $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.



- (1) Déterminez l'abscisse des points d'extremum de la fonction $g(x)$, puis déterminez leur type.

On note S l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et par l'axe des abscisses sur l'intervalle $1 \leq x \leq 2,7$.

Données : $g(2,7) = 0$, $g(4,5) = 3 \cdot S$.

- (2) Exprimez en fonction de S , l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et par l'axe des abscisses sur l'intervalle $0 \leq x \leq 4,5$.

Deuxième partie – Récurrence, suites et probabilités

2. Soit a_n une suite géométrique infinie croissante dont la raison est q .

$$0 < q < 1.$$

- א. Déterminez si tous les termes de la suite a_n sont positifs ou s'ils sont négatifs. Justifiez votre réponse.

b_n est une suite géométrique infinie dont la raison est également q .

c_n est une suite infinie qui pour tout n entier naturel, vérifie $c_n = 2b_n - a_n$ ($c_n \neq 0$).

- ב. Prouvez que la suite c_n est une suite géométrique, puis déterminez sa raison en fonction de q .

On sait que $c_1 = 5\frac{2}{3}$ et que la somme des termes de la suite c_n est 17 fois supérieure à la somme des termes de la suite b_n .

- ג. Déterminez la valeur de a_1 .

On sait que la somme des termes situés aux emplacements pairs de la suite a_n est supérieure de 4 à la somme des termes situés aux emplacements impairs de la suite a_n .

- ד. Déterminez la valeur de q .

3. Dans un grand centre d'emballage, on emballe uniquement deux types de fruits : des citrons et des oranges.

Une partie des fruits sont destinés à l'exportation et le reste des fruits ne sont pas destinés à l'exportation.

La probabilité de choisir au hasard deux oranges parmi tous les fruits de ce centre d'emballage est de 0,4096.

On choisit au hasard un fruit parmi tous les fruits de ce centre d'emballage.

- א. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi un citron ?

La probabilité de choisir au hasard une orange parmi les fruits destinés à l'exportation est de $\frac{3}{5}$.

La probabilité de choisir au hasard un citron parmi les fruits qui ne sont pas destinés à l'exportation est de $\frac{4}{15}$.

On choisit au hasard un fruit parmi tous les fruits de ce centre d'emballage.

- ב. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi un fruit destiné à l'exportation ?

On choisit au hasard deux fruits parmi tous les fruits de ce centre d'emballage.

- ג. On sait que l'on a choisi deux citrons. Quelle est la probabilité que l'un d'eux soit destiné à l'exportation et que l'autre ne soit pas destiné à l'exportation ?

On choisit au hasard 4 fruits parmi tous les fruits de ce centre d'emballage. On sait qu'au moins l'un de ces fruits est destiné à l'exportation.

- ד. Quelle est la probabilité qu'au maximum 3 des fruits qui ont été choisis soient destinés à l'exportation ?

Troisième partie – Géométrie et trigonométrie dans le plan

4. AB est un diamètre d'un cercle de centre O .

La corde CK coupe le rayon AO en un point E (voir figure).

Donnée : $\angle EKO = \angle ABK$.

⌘. Démontrez que $\triangle ACE \sim \triangle OKE$.

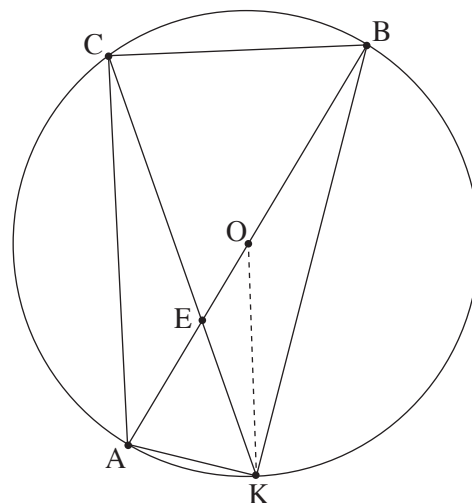
Le prolongement du segment KO coupe la corde CB en un point P .

On sait que $PO = 4$ et que le rayon du cercle vaut 4,8 .

Ⓐ. (1) Démontrez que PO est un segment des milieux du triangle ABC .

(2) Déterminez la longueur du segment EO .

Ⓐ. Déterminez le rapport entre l'aire du triangle ACE et l'aire du triangle AOK .



5. La figure ci-contre représente un triangle rectangle ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).

On a construit un triangle supplémentaire ACD sur le côté AC , de sorte que AC est la bissectrice de l'angle BAD .

On note : $AB = k$, $\angle CAB = \alpha$.

⌘. Exprimez en fonction de k et de α , la longueur de AC .

Données : $AD = 1,5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3,25} \cdot k$.

Ⓐ. Calculez la valeur de α .

Substituez $\alpha = 60^\circ$ puis répondez aux articles Ⓐ-Ⓓ.

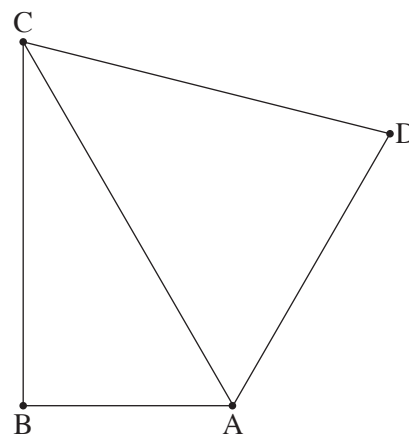
Le point M est le centre du cercle qui est inscrit dans le triangle ABC .

Ⓐ. Exprimez en fonction de k , le rayon du cercle qui est inscrit dans le triangle ABC .

Le point E est le centre du cercle dans lequel le triangle ABC est inscrit.

Donnée : $ME = 6$.

Ⓓ. Calculez la valeur de k .



Quatrième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{2ax}{(x^2 - 16)^2}$, a est un paramètre positif.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.
- (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x)$ dont la fonction dérivée est $g'(x) = f(x) + 1$.

Le domaine de définition de la fonction $g(x)$ et de la fonction dérivée $g'(x)$ est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$.

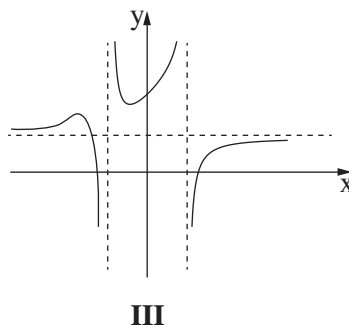
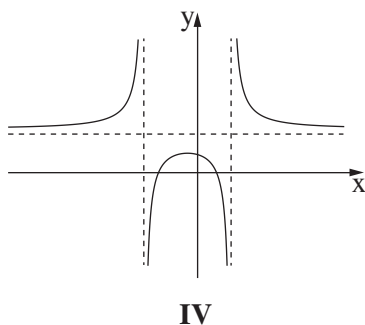
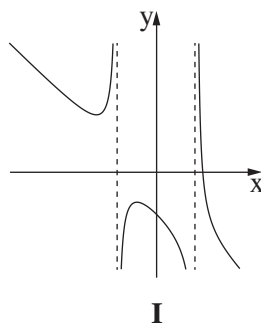
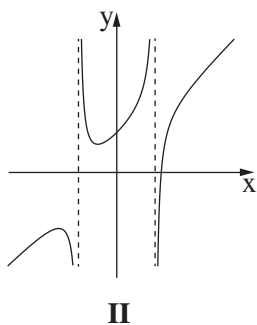
On sait que la fonction $g(x)$ admet un point d'extremum au point d'abscisse $x = -2$.

א. Déterminez la valeur de a .

Substituez dans la fonction $f(x)$ la valeur de a que vous avez déterminée puis répondez aux articles ג-ד.

On sait que la fonction $g(x)$ passe par le point $(2, 7)$.

- ג. Écrivez une expression algébrique possible de la fonction $g(x)$.
- ד. Déterminez lequel des graphes I-IV ci-dessous est un graphe possible de la fonction $g(x)$. Justifiez votre réponse.



7. Soit la fonction $f(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$, sur l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires à l'axe des abscisses.
- ב. Déterminez si la fonction $f(x)$ est paire ou impaire. Justifiez votre réponse.
- ג. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- ד. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$, sur l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- ה. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.
 - (2) Montrez que $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ pour tout x du domaine de définition.
 - ו. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la droite $y = k$ coupe le graphe de la fonction $g(x)$ en 3 points exactement ?
- Si c'est le cas, déterminez cette valeur. Sinon, justifiez votre réponse.

8. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$,

R est un paramètre positif.

La fonction $f(x)$ est définie sur l'intervalle $-R \leq x \leq R$.

Le point A se situe sur le graphe de la fonction $f(x)$ dans le premier quadrant.

On trace une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point A et qui coupe le graphe de la fonction $f(x)$ en un point supplémentaire B .

Les points C et D se situent sur l'axe des abscisses de manière à former un rectangle $ABCD$.

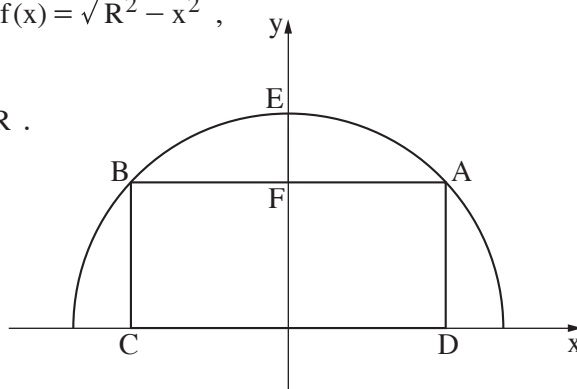
Le point F est le point d'intersection du côté AB avec l'axe des ordonnées.

Le point E est le point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des ordonnées.

Soit un carré dont la longueur du côté est égale à la longueur du segment EF .

On note t l'abscisse du point A .

- א. (1) Exprimez la longueur du segment EF en fonction de R et de t .
- (2) Exprimez le périmètre du rectangle $ABCD$ en fonction de R et de t .
- ב. Exprimez en fonction de R , la valeur de t pour laquelle la différence entre le périmètre du rectangle $ABCD$ et le périmètre du carré est maximale.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך