

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות

מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$100 = 20 \times 5$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

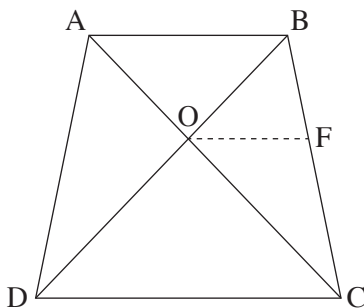
פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 100^2$.



ב. בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD ($AB \parallel CD$).

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.

נתון: $\angle BAO = \angle CDO$.

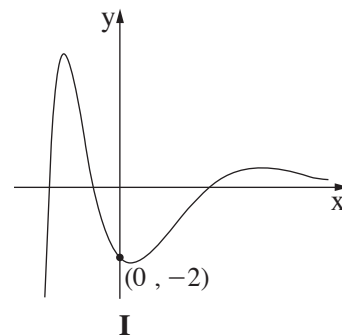
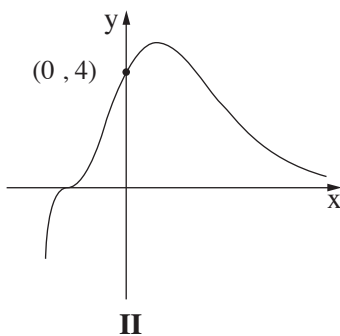
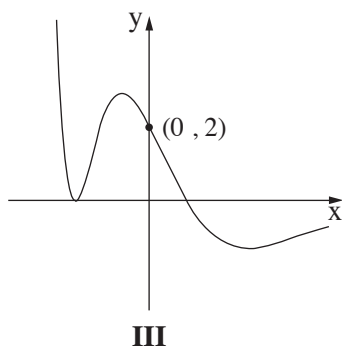
(1) הוכיחו כי הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.

הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $DO = 4$, $BO = 3$.

(2) מצאו את אורך הקטע OF.

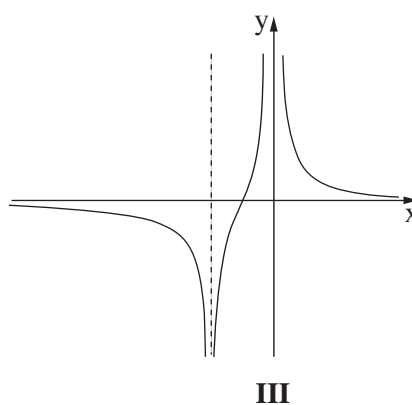
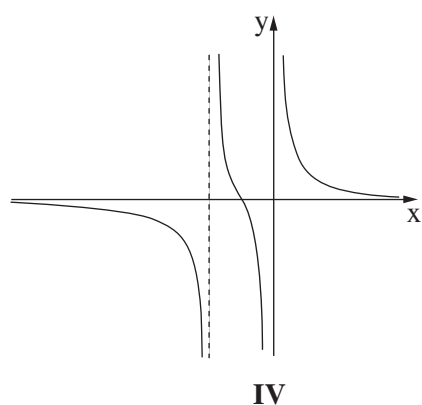
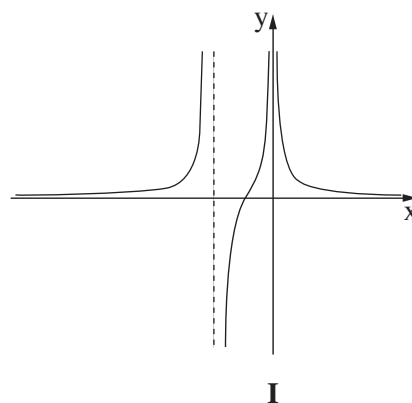
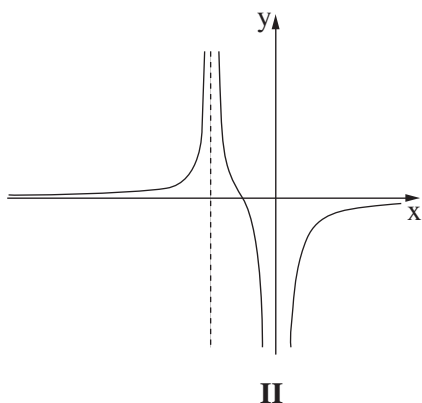
- ג. הפונקצייה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x .
 לפניכם שלושה גרפים I–III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$, אחד את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.
 בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x .
 על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y .



- (1) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה. נמקו את תשובתכם.
- (2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.
- שיעורי נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הם $(a, 5)$.
- (3) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקצייה $f''(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- y .

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$, המוגדרת בתחום $x \neq -2, x \neq 0$.

- (1) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.
- (3) חשבו את השטח הכלוא על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 4$.



פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2. נתונה סדרה הנדסית אינסופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$. נתון: $\frac{a_4}{a_2} = 4$, $2a_2 + 8 = a_4$.
- א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).
נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.
בונים מאיברי הסדרה A סדרה אינסופית חדשה B .
נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.
- ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.
בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אינסופית נוספת C .
איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \dots$, $k \neq 0$. k הוא פרמטר.
- ג. (1) מצאו את מנת הסדרה C .
(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.
- נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B , וב- S_C את סכום הסדרה C .
נתון: $S_C = 4 \cdot S_B$.
ד. מצאו את הערך של k .
3. במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד.
נסמן ב- P את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' ($0 < P < 1$).
בוחרים באקראי 3 מצביעים.
נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי 2 מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.
- א. מצאו את הערך של P .
בוחרים באקראי 4 מצביעים.
- ב. ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?
- חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.
נתון כי 40% מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו-15% מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.
- ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?
- לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים, התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד.
הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שריאיון צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף שהצביע למפלגה האחרת.
- ד. מהי ההסתברות שדני התקשר ל-5 צעירים בדיוק?

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r .

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K .

הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO .

א. הוכיחו כי $\angle AOE = 2\angle KAE$.

המשך הקטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M .

נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK .

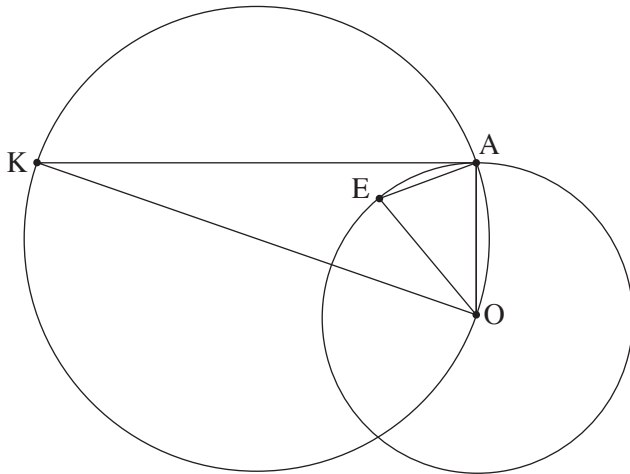
ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

ג. הוכיחו כי $\triangle MOA \sim \triangle OEA$.

נתון: $R = 1.5r$.

נסמן ב- S את שטח המשולש MEO .

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA .



5. במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).

נסמן: $\angle ACB = 2\alpha$.

א. (1) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע CO .

(2) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הצלע AC .

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO .

ב. מצאו את הערך של α .

הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג-ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K .

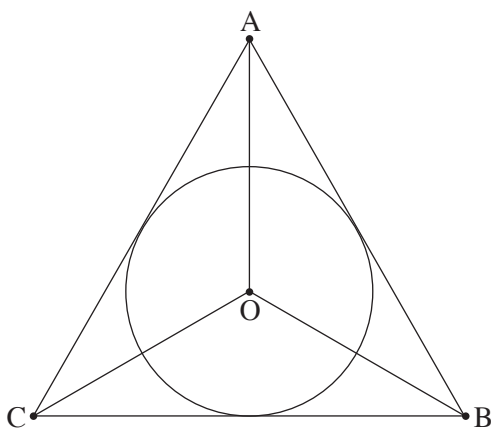
נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{175}$.

ג. מצאו את הערך של r .

הנקודה E נמצאת על הצלע CB .

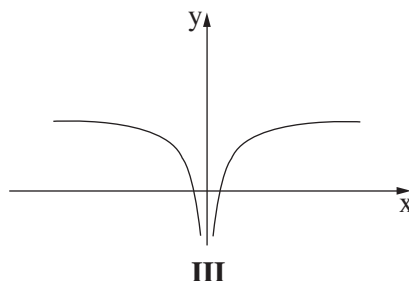
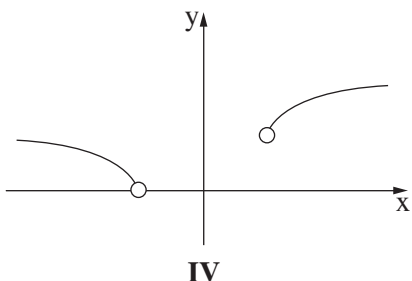
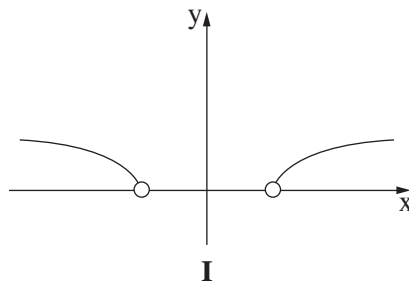
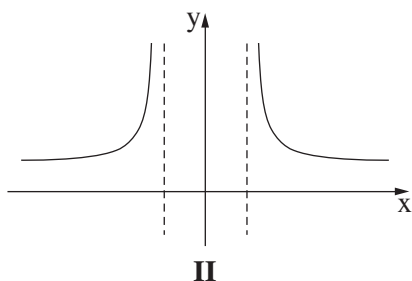
נתון כי שטח המשולש CKE הוא 18.

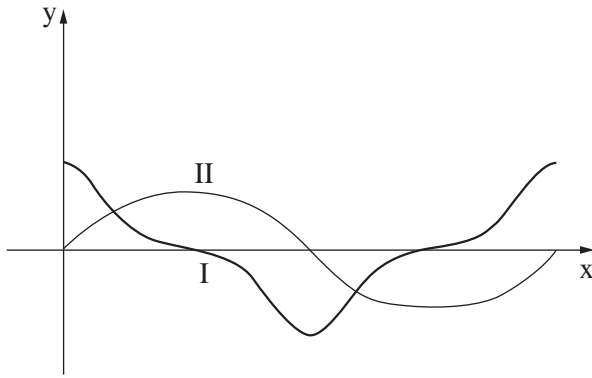
ד. חשבו את אורך הקטע BE .



פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.
 ענו על הסעיפים א-ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי-זוגית.
- ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- ה. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) קבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.
- נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 2a$ ו- $x = 3a$ הוא 7.5 .
- ו. מצאו את הערך של a .





7. בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים, II-I, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.

א. קבעו איזה מן הגרפים II-I מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

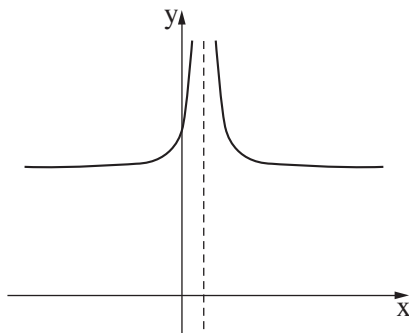
(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקצייה $g(x) = |f(x) - 0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 9$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x=1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

בהצלחה!