

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Résolvez les exercices en suivant ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : quatre heures et quart.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire en quatre parties comporte huit exercices.

Première partie — Exercices courts

Deuxième partie — Récurrence, suites et probabilités

Troisième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Quatrième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez cinq exercices, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties.

$5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les fonctionnalités de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des fonctionnalités de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointés au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — שאלות קצרות

פרק שני — אינדוקציה, סדרות והסתברות

פרק שלישי — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של

פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות

טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חסור פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez cinq des exercices 1-8, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties (20 points par question).

Attention : si vous résolvez plus de cinq exercices, seuls les cinq premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie — Exercices courts

1. Répondez à deux des quatre articles א-ד ci-dessous. Si vous répondez à plus de deux articles, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

א. (1) Démontrez par récurrence ou par toute autre méthode, que tout n entier naturel vérifie :

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) Calculez la valeur de la somme : $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 100^2$.

ב. La figure ci-contre représente le trapèze ABCD ($AB \parallel CD$).
Le point O est le point d'intersection des diagonales du trapèze.
Donnée : $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CDO$.

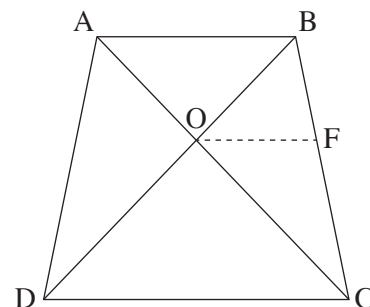
(1) Démontrez que le trapèze ABCD est un trapèze isocèle.

Le point F se situe sur le côté BC de sorte que le segment OF est parallèle aux bases du trapèze.

Données : les diagonales du trapèze sont perpendiculaires entre elles,

$$DO = 4, BO = 3.$$

(2) Déterminez la longueur du segment OF.

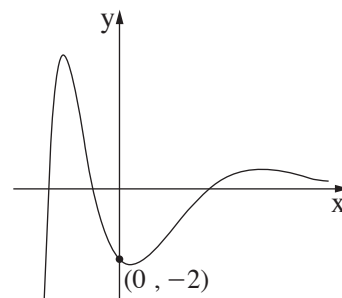
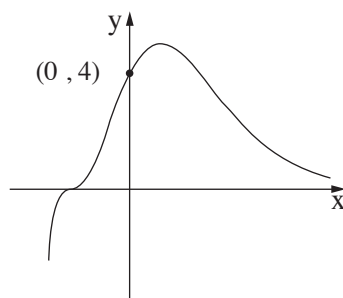
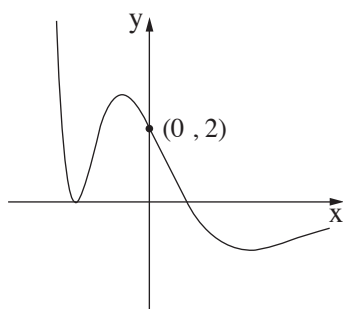


- א. La fonction $f(x)$, la fonction dérivée $f'(x)$ et la fonction dérivée seconde $f''(x)$ sont définies pour tout x .

Voici trois graphes I-III. L'un des graphes représente la fonction $f(x)$, un autre représente la fonction dérivée $f'(x)$ et un autre représente la fonction dérivée seconde $f''(x)$.

Sur chaque graphe figurent tous ses points d'extremum et tous ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Sur chaque graphe sont inscrites les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.



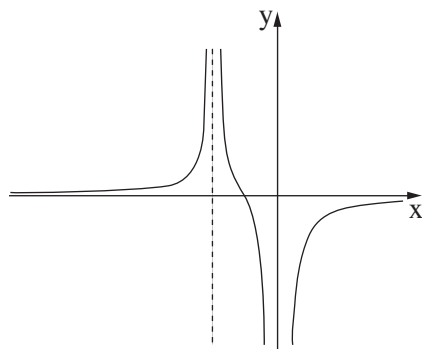
- (1) Faites correspondre chacune des fonctions $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ avec le graphe qui la représente. Justifiez votre réponse.
- (2) Combien de points d'inflexion la fonction $f(x)$ admet-elle ? Justifiez votre réponse.

Les coordonnées du point de maximum de la fonction $f(x)$ sont $(a, 5)$.

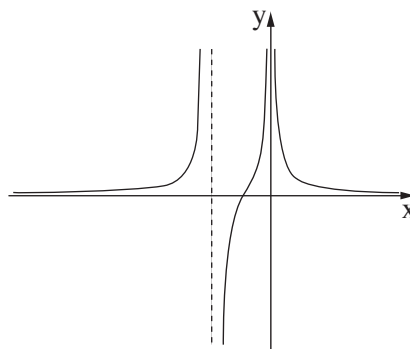
- (3) Déterminez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f'(x)$, par le graphe de la fonction $f''(x)$, par la droite $x = a$ et par l'axe des ordonnées.

7. Soit la fonction $f(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$ qui est définie sur l'intervalle $x \neq 0$, $x \neq -2$.

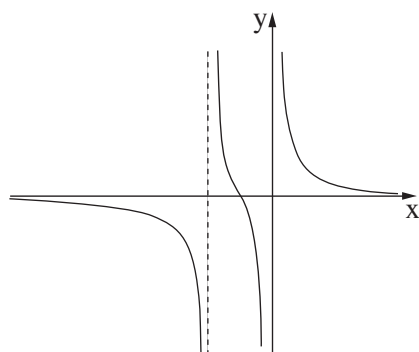
- (1) Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive.
- (2) Parmi les graphes I-IV, déterminez lequel représente la fonction $f(x)$. Justifiez votre réponse.
- (3) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = 1$ et $x = 4$.



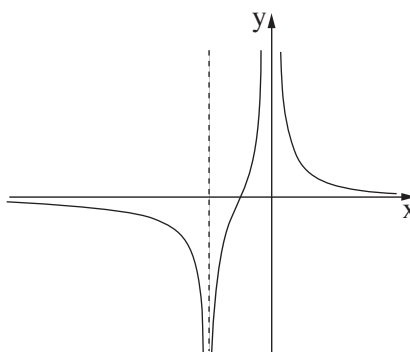
II



I



IV



III

Deuxième partie – Récurrence, suites et probabilités

2. Soit une suite géométrique infinie A dont les termes sont $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Données : $2a_2 + 8 = a_4$, $\frac{a_4}{a_2} = 4$.

- ⌘. Déterminez la valeur de a_3 (déterminez les deux possibilités).

On sait que la suite A n'est ni croissante ni décroissante.

À partir des termes de la suite A , on construit une nouvelle suite infinie B .

On sait que les termes de la suite B vérifient $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ pour tout n entier naturel.

- ⌚. Démontrez que la suite B est une suite géométrique, puis déterminez sa raison.

À partir des termes de la suite A , on construit une autre suite géométrique infinie C .

Les termes de la suite C sont : $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \dots$, $k \neq 0$ est un paramètre.

- ⌚. (1) Déterminez la raison de la suite C .

- (2) Déterminez pour quelles valeurs de k la suite C est croissante. Justifiez votre réponse.

On note S_B la somme des termes de la suite B , et S_C la somme des termes de la suite C .

Donnée : $S_C = 4 \cdot S_B$.

- ⌚. Déterminez la valeur de k .

3. Des élections ont eu lieu dans un grand pays. Lors de ces élections, les électeurs pouvaient voter uniquement pour le parti ⌘ ou pour le parti ⌚.

On note P la probabilité qu'un électeur choisi au hasard ait voté pour le parti ⌘ ($0 < P < 1$).

On choisit au hasard 3 électeurs.

On sait que la probabilité qu'exactement un d'entre eux ait voté pour le parti ⌘ est 2 fois plus élevée que la probabilité que les trois électeurs aient voté pour le parti ⌚.

- ⌘. Déterminez la valeur de P .

On choisit au hasard 4 électeurs.

- ⌚. On sait que les 4 électeurs ont voté pour le même parti. Quelle est la probabilité qu'ils aient voté pour le parti ⌘ ?

Certains électeurs sont des personnes âgées, le reste des électeurs sont des jeunes.

On sait que 40 % des électeurs âgés ont voté pour le parti ⌚ et que 15 % des électeurs jeunes ont voté pour le parti ⌘.

- ⌚. Quelle est la probabilité de choisir au hasard un électeur jeune parmi l'ensemble des électeurs ?

Après les élections, un sondage par téléphone est effectué auprès des électeurs. Danny, l'un des sondeurs, a téléphoné au hasard uniquement à des électeurs jeunes.

Il leur a téléphoné les uns après les autres et a arrêté immédiatement tout appel dès qu'il a interviewé un jeune qui a voté pour l'un des partis, puis un autre jeune qui a voté pour l'autre parti.

- ⌚. Quelle est la probabilité que Danny ait téléphoné à 5 jeunes exactement ?

Troisième partie – Géométrie et trigonométrie dans le plan

4. La figure ci-dessous représente un grand cercle de rayon R et un petit cercle de centre O et de rayon r .

Le point O se situe sur le grand cercle.

Le point A est l'un des points d'intersection des deux cercles, comme cela est décrit sur la figure.

On trace une tangente au petit cercle, passant par le point A . La tangente coupe le grand cercle en un point K .

Le point E se situe sur le petit cercle à l'intérieur du triangle KAO .

⌘. Démontrez que $\angle AOE = 2\angle KAE$.

Le prolongement du segment AE coupe le segment OK en un point M .

On sait que le point M est le milieu du segment OK .

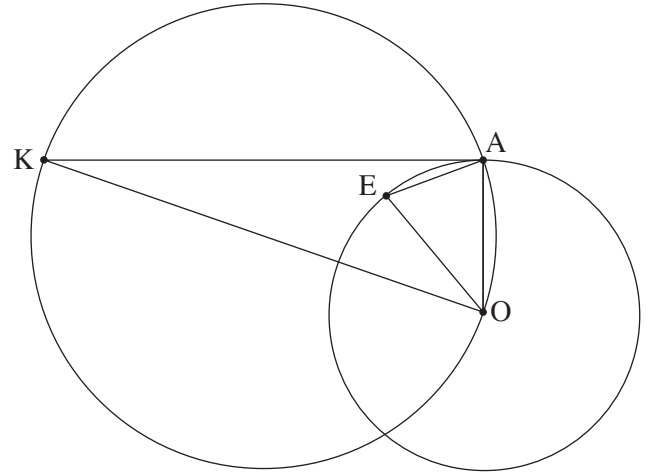
Ⓐ. Démontrez que le point M est le centre du grand cercle.

Ⓛ. Démontrez que $\triangle MOA \sim \triangle OEA$.

Donnée : $R = 1,5r$.

On note S l'aire du triangle MEO .

Ⓣ. Exprimez l'aire du triangle OKA en fonction de S .



5. Dans un triangle isocèle ABC ($AC = AB$) est inscrit un cercle de centre O et de rayon r (voir figure).

On note $\angle ACB = 2\alpha$.

⌘. (1) Exprimez la longueur du segment CO en fonction de r et de α .

(2) Exprimez la longueur du côté AC en fonction de r et de α .

On sait que la longueur du côté AC est $\sqrt{3}$ fois plus grande que la longueur du segment CO .

Ⓐ. Déterminez la valeur de α .

Substituez $\alpha = 30^\circ$ et répondez aux articles Ⓛ-Ⓣ.

Le cercle coupe le segment BO en un point K .

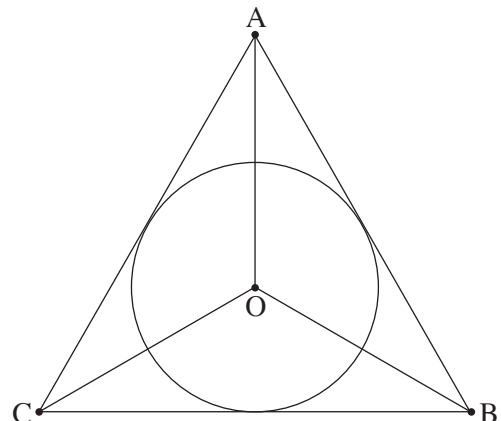
On sait que la longueur du segment CK vaut $\sqrt{175}$.

Ⓛ. Déterminez la valeur de r .

Le point E se situe sur le côté CB .

On sait que l'aire du triangle CKE vaut 18.

Ⓣ. Calculez la longueur du segment BE .



Quatrième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a est un paramètre positif.

Répondez aux articles ۸-۷. Exprimez vos réponses en fonction de a , si cela est nécessaire.

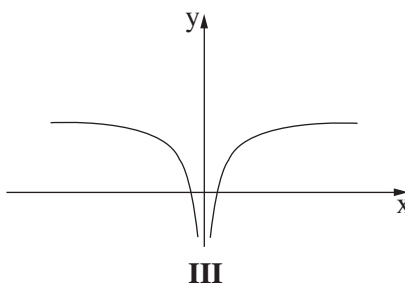
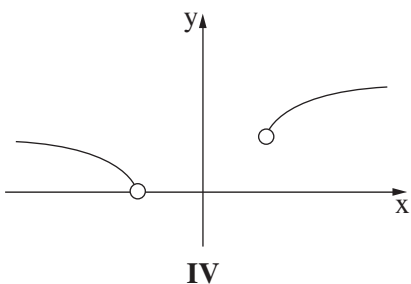
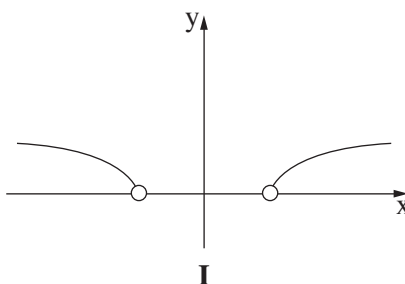
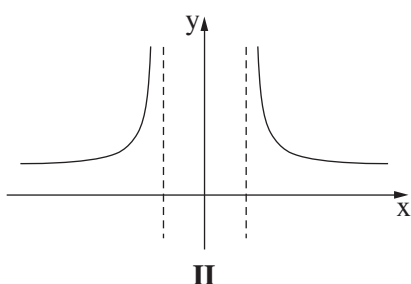
۸. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
 (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
۹. Démontrez que la fonction $f(x)$ est impaire.
۱۰. Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).
۷. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. Le domaine de définition de la fonction $g(x)$ est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$.

۸. (1) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $g(x)$.
 (2) Déterminez lequel des graphes I-IV figurant à la fin de l'exercice, représente le graphe de la fonction $g(x)$. Justifiez votre réponse.

On sait que l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = 2a$ et $x = 3a$ vaut 7,5.

۱. Déterminez la valeur de a .

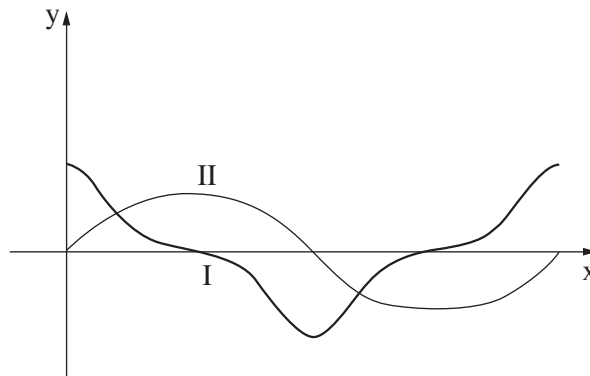


7. La figure ci-contre représente deux graphes, I et II, sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

Un des graphes décrit la fonction $f(x)$, et l'autre décrit la fonction dérivée $f'(x)$.

Les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ sont définies pour tout x sur l'intervalle donné.

- א. Déterminez lequel des graphes I-II représente la fonction $f(x)$. Justifiez votre réponse.



On sait que $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ est définie sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.
(2) Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

Soit la fonction $g(x) = |f(x) - 0,4|$ définie sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

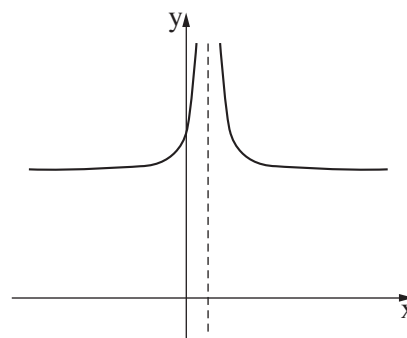
- א. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $g(x)$ avec l'axe des abscisses.
ב. (1) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.
(2) Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $g(x)$, puis déterminez leur type.

8. La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 9$.

La fonction $f(x)$ est définie sur l'intervalle $x \neq 1$,

a est un paramètre positif.

- א. Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.



Le point C se situe sur le graphe de la fonction $f(x)$ et son abscisse vaut 2.

On a tracé une tangente au graphe de la fonction $f(x)$ passant par le point C.

- א. Exprimez l'équation de la tangente en fonction de a .

La tangente coupe l'axe des abscisses en un point A et coupe la droite $x=1$ en un point B.

D est un point dont les coordonnées sont $(1, 0)$.

- א. Exprimez l'aire du triangle ADB en fonction de a .
ב. Déterminez la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle ADB est minimale.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך