

מבני נתונים ויעילות אלגוריתמים

הוראות לנבחנים

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: 40 נקודות

פרק שני: 60 נקודות

סך-הכול: 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר לשימוש: כל חומר עזר כתוב בכתב-יד או מודפס על נייר.

ד. הוראות מיוחדות:

1. כל השאלות בשאלון זה הן שאלות רב-ברירה. את התשובות לשאלות יש לסמן אך ורק על גבי דף התשובות שנספח א'.

2. כתבו במחברת הבחינה בלבד כל מה שברצונכם לכתוב כטייטה. כתיבת טיוטה בגוף השאלון או על דפים שמחוץ למחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

3. ענו על מספר השאלות הנדרש בשאלון. המעריך יקרא ויעריך את מספר התשובות הנדרש בלבד, לפי סדר כתיבתן, ולא יתייחס לתשובות נוספות.

4. בנספח ב' לשאלון זה מובא מילון מונחים בשפות עברית, ערבית, אנגלית ורוסית. תוכלו להיעזר בו בעת הצורך.

הוראות למשגיחים:

בתום הבחינה יש לוודא שהנבחנים הדביקו את מדבקת הנבחן שלהם במקום המיועד לכך בדף התשובות שנספח א' וצירפו אותו למחברת הבחינה.

כתבו במחברת הבחינה בלבד, בעמודים נפרדים, כל מה שברצונכם לכתוב כטייטה (ראשי פרקים, חישובים וכדומה).
כתבו "טייטה" בראש כל עמוד טיוטה. כתיבת טיוטות כלשהן על דפים שמחוץ למחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה!

בשאלון זה 26 עמודים ו-2 עמודי נספחים

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים,
אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

בשאלון זה שני פרקים ובהם חמש שאלות. ענו על שני הפרקים, על-פי ההנחיות.
כל השאלות בשאלון זה הן שאלות רב-ברירה.
לכל שאלה נתונות ארבע תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
את התשובה הנכונה לשאלה יש לסמן אך ורק על גבי דף התשובות שבנספח א'.

פרק ראשון (40 נקודות)

שאלה 1 – שאלת חובה (40 נקודות)

ענו על כל הסעיפים (א'–ג').

יועץ ארגוני הוזמן לייעץ לחברה גדולה, המבצעת פרויקטים בתחום התוכנה. היועץ מגלה שלחברה אין מערכת מפותחת לניהול הארגון, אלא מידע גולמי בלבד.

בין היתר היועץ מקבל טבלה המכילה מידע על כלל עובדי החברה. המידע על כל עובד כולל את הנתונים הבאים:

- מספר תעודת הזהות.
- שם מלא.
- שם המנהל הישיר.
- שם היחידה שאליה העובד משויך.
- השכר החודשי.
- דירוג העובד על ידי מנהלו הישיר (מספר שלם בין 1 ל-10, כולל).

(12 נק') א. היועץ רוצה לפתח מדד ביצועים, שיאתר את העובד שביצועיו הם הגבוהים ביותר, ואת העובד שביצועיו הם הנמוכים ביותר. המדד יוגדר כמכפלה של ציון ההערכה של כל עובד עם גובה השכר שלו, ביחידות של עשרת אלפים שקלים. לדוגמה, עובד שציון ההערכה שלו הוא 8, ושכרו החודשי 25 אלף ש"ח, יקבל מדד ביצועים של $20 (8 \times 2.5)$.

ענו על כל הסעיפים שלפניכם (לכל סעיף – 2 נקודות):

1) היועץ צריך לבנות מבנה נתונים שיכיל עבור כל עובד את המדדים הרלוונטיים, ויאפשר למצוא את העובד שמדד הביצועים שלו הוא הגבוה ביותר. אם כמה עובדים קיבלו את מדד הביצועים הגבוה ביותר, מספיק למצוא אחד מהם. איזה מבנה נתונים יאפשר את ביצוע הפעולה המתוארת, ביעילות מרבית?

1. ערמת מקסימום

2. רשימה מקושרת חד-כיוונית הממוינת בסדר עולה

3. עץ חיפוש בינארי

4. עץ AVL

(2) מה תהיה סיבוכיות זמן הריצה של מציאת העובד הטוב ביותר, במבנה שיעילותו היא המרבית (כמופיע בסעיף הקודם)?

1. $O(1)$

2. $O(\log n)$

3. $O(n)$

4. $O(n \log n)$

(3) כעת רוצים למצוא את העובד שמדד הביצועים שלו הוא הנמוך ביותר, ולפטר אותו – כלומר להוציא אותו ממבנה הנתונים. אם כמה עובדים קיבלו את מדד הביצועים הנמוך ביותר, מספיק למצוא אחד מהם. איזה מבנה נתונים יאפשר את ביצוע שתי הפעולות המתוארות בסעיף זה, ביעילות מרבית?

1. ערמת מינימום

2. רשימה מקושרת חד-כיוונית הממוינת בסדר עולה

3. עץ חיפוש בינארי

4. עץ AVL

(4) מה תהיה סיבוכיות זמן הריצה של שתי הפעולות המתוארות בסעיף הקודם?

1. $O(1)$

2. $O(\log n)$

3. $O(n)$

4. $O(n \log n)$

(5) כעת, היועץ מעוניין לבנות מבנה נתונים יחיד שיהיה היעיל ביותר לביצוע המשימות המתוארות בסעיפים 1 ו-3. כמו כן, המבנה צריך להתאים לביצוע יעיל של עדכון במדד הביצועים של עובד כלשהו, בעקבות שינוי המשכורת או הדירוג שנותן המנהל האיש. באיזה מבנה נתונים עדיף להשתמש הפעם, מבחינת יעילות זמני הריצה? הניחו שקיימת גישה ישירה למידע של כל עובד השמור במבנה הנתונים.

1. ערמת מקסימום וערמת מינימום

2. רשימה מקושרת חד-כיוונית ממוינת בסדר עולה

3. עץ חיפוש בינארי

4. עץ AVL

6) מבין הפעולות הנזכרות בסעיף הקודם (מציאת בעל הביצועים הטובים ביותר, מציאת בעל הביצועים הגרועים ביותר, הוצאה מהרשימה, ועדכון) - מה תהיה סיבוכיות זמן הריצה הגרועה ביותר?

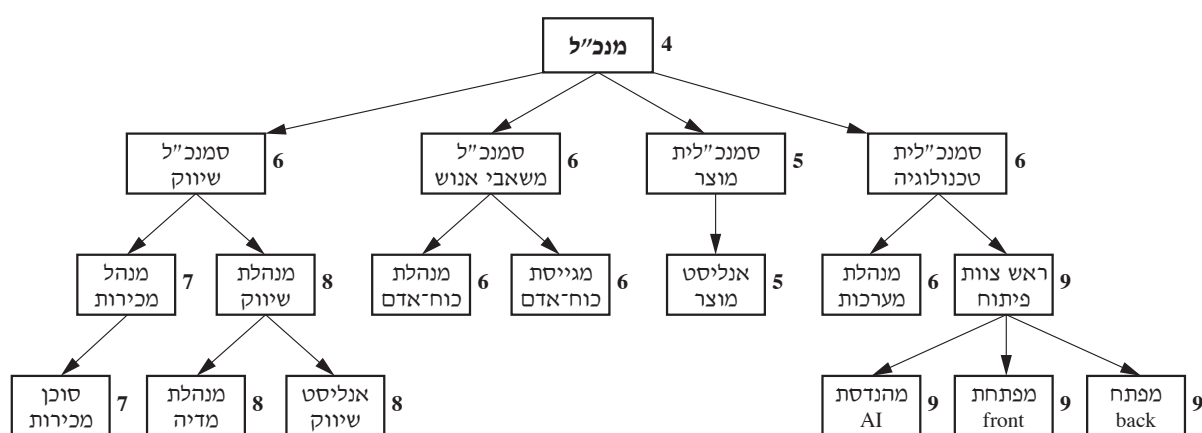
1. $O(1)$

2. $O(\log n)$

3. $O(n)$

4. $O(n \log n)$

10 נק') ב. על היועץ להציע מדד לרמת היעילות הארגונית של כל החברה. לשם כך, היועץ מחליט לייצג את מבנה החברה באמצעות עץ היררכיה. להלן דוגמה לעץ מהסוג המתואר:



היועץ מחליט שמדד היעילות הארגונית יהיה "המסלול המשוקלל הארוך ביותר" שקיים בחברה בין המנכ"ל לעובד זוטר כלשהו, כמוסבר:

"המסלול הארוך ביותר" שאיננו משוקלל - הוא גובהו של העץ. למשל, באיור המובא לעיל, הגובה יהיה 3. לעומת זאת, חישוב המסלול המשוקלל יהיה כדלהלן:

- משקלו של כל קודקוד יהיה שווה למשקל של אביו, בתוספת מספר הבנים שיש לקודקוד.

- משקלו של שורש העץ יהיה זהה למספר הבנים שיש לו.

- אורכו של המסלול המשוקלל הארוך ביותר יהיה שווה למשקל הגבוה ביותר שיש לעלה כלשהו בעץ.

בדוגמה שלעיל, משקלו של כל קודקוד מופיע מימין לו. כפי שניתן לראות, ערך המסלול המשוקלל הארוך ביותר הוא 9 - בעקבות המשקל שניתן לעובדי צוות הפיתוח.

לפניכם אלגוריתם **רקורסיבי** $\text{weightedHeight}(\text{node}, \text{weightOfParent})$ לחישוב המסלול המשוקלל הארוך ביותר, המתחיל בקודקוד node , כאשר weightOfParent הוא משקל אביו של node . עבור שורש העץ משקלו של אביו שווה ל-0.

האלגוריתם משתמש בפונקצייה `numberOfChildren (node)`, המחזירה את מספר הבנים שיש לקודקוד `node`, וכן בפונקצייה `children (node)`, המחזירה את רשימת כל הבנים של קודקוד `node`.

באלגוריתם שלהלן חסרים **ארבעה** ביטויים, המסומנים במספרים בין (1) ל-(4). עקבו אחר האלגוריתם וענו על חמשת הסעיפים הבאים אחריו (לכל סעיף - 2 נקודות).

```
weightedHeight (node, weightOfParent)
    if (numberOfChildren (node) == 0)    // אתה נמצא בעלה
        return ____ (1) ____;
    else
        weight = weightOfParent + ____ (2) ____;
        maxWeight = ____ (3) ____;
        for each u in children (node)
            temp = ____ (4) ____;
            if temp > maxWeight
                maxWeight = temp;
        return maxWeight;
```

(1) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (1)?

1. `weightedHeight (u, weight)`

2. `numberOfChildren (node)`

3. `weightOfParent`

4. `maxWeight`

(2) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (2)?

1. `weightedHeight (u, weight)`

2. `numberOfChildren (node)`

3. `weightOfParent`

4. `maxWeight`

(3) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (3)?

1. `weightedHeight (u, weight)`

2. `numberOfChildren (node)`

3. `weight`

4. `maxWeight`

(4) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (4)?

1. `weightedHeight (u, weight)`

2. `numberOfChildren (node)`

3. `weight`

4. `maxWeight`

(5) בהנחה שהפונקציות `children` ו-`numberOfChildren` פועלות בסיבוכיות $O(1)$, מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם המובא לעיל, עבור n עובדים?

1. $O(1)$

2. $O(n)$

3. $O(\log n)$

4. $O(n \log n)$

(18 נק') ג.

כעת, היועץ ניגש לניתוח התהליכים בחברה. עליו לקבוע אם הקצאת כוח האדם ליחידות השונות היא אופטימלית, ואם שיתוף הפעולה בין היחידות יעיל מספיק. לשם כך הוא מקבל מהחברה מידע גולמי, המובא בטבלה. הטבלה מתייחסת לפרויקט שנמצא בשלבים מתקדמים של תכנון ואפיון. היא מכילה את **שלבי** ביצוע הפרויקט, ואת משך הזמן המתוכנן לכל **משימה**, שהיא העבודה שיש לבצע בין שלב אחד של הפרויקט לבין השלב הבא מייד אחריו.

משימות שונות ניתנות לביצוע במקביל, וכך גם שלבי הפרויקט. לכל שלב (מלבד השלב הראשון, של תחילת הפרויקט) קודמת משימה אחת או יותר, ולהשלמת כל שלב הכרחי שיתיימו **כל** המשימות שהוגדרו לו.

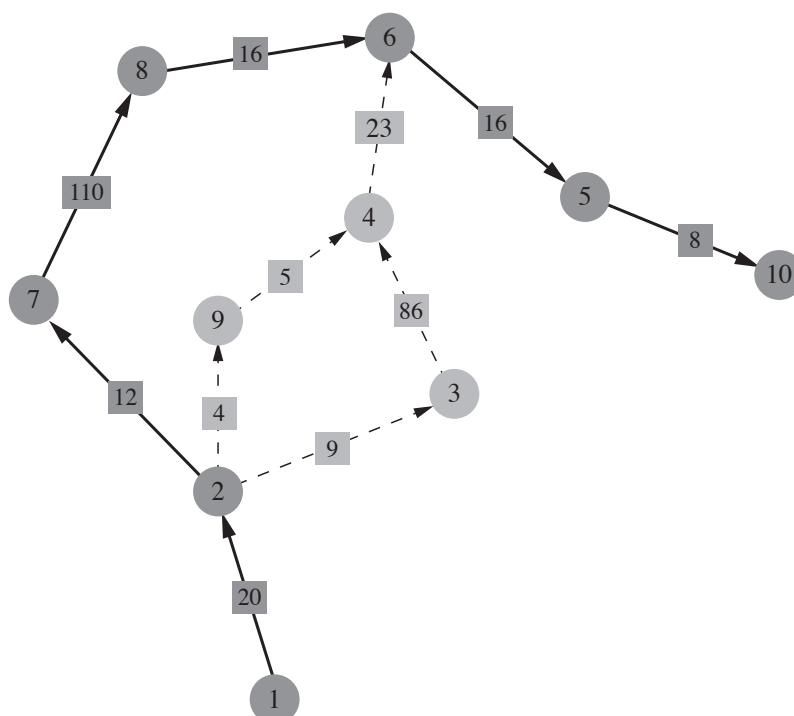
כך הוא גם בפרויקט כולו: הזמן המזערי הדרוש להשלמת הפרויקט הוא הזמן הדרוש לביצוע רצף המשימות העוקבות הארוך ביותר הנדרש לסיומו. רצף כזה מכונה בשם **המסלול הקריטי**. תפקידו של היועץ לחשב את הזמן המזערי שנדרש לביצוע הפרויקט, ואת המסלול הקריטי.

להלן דוגמה של טבלת תכנון לפרויקט פיתוח תוכנה:

מספר שלב	שם שלב	השלב הבא	שם המשימה	זמן ביצוע (בשעות)
1	תחילת הפרויקט	2	אפיון המסכים	20
2	אפיון כללי	3	אפיון צד שרת	9
2	אפיון כללי	7	אפיון צד לקוח	12
2	אפיון כללי	9	תכנון מסד הנתונים	4
3	מפת דרכים צד שרת	4	כתיבת קוד צד שרת	86
4	ביצוע צד שרת ודאטה־בייס	6	אינטגרציה עם צד לקוח	23
5	בדיקות	10	העברה לסביבת ייצור (production)	8
6	אינטגרציה	5	ביצוע בדיקות (טסטים)	16
7	מפת דרכים צד לקוח	8	כתיבת קוד צד לקוח	110
8	ביצוע צד לקוח	6	אינטגרציה עם צד שרת	16
9	מפת דרכים דאטה־בייס	4	הקמת מסד הנתונים	5
10	סיום הפרויקט	--	--	--

מתוך המידע הנתון, היועץ בונה לכל פרויקט גרף מכוון חסר מעגלים (DAG), אשר מכיל את המידע על התקדמות הפיתוח. הגרף נפרס על פני ציר הזמן, כאשר:

- שורש הגרף מייצג את רגע תחילת העבודה על הפרויקט.
- כל קודקוד מייצג שלב בביצוע הפרויקט.
- כל קשת מייצגת משימה אשר מחברת בין שלב לשלב.
- משקלה של כל קשת מייצג את הזמן המתוכנן של ביצוע המשימה.



האיור שלעיל מציג את גרף הפרויקט בהתאם ללוח הזמנים שלו. המסלול הרציף מסמן את המסלול הארוך ביותר (המסלול הקריטי), ואורכו 182 שעות עבודה.

להלן מובא אלגוריתם המחשב את המסלול הקריטי, ואת אורכו, בגרף מכוון ממושקל חסר מעגלים, $G = (V, E, w)$, כאשר: V הוא אוסף הקודקודים בגרף, E הוא אוסף הקשתות ו- w היא פונקציית משקל המוגדרת על הקשתות.

לגרף G קיים מקור אחד (דרגת כניסה 0) ובור אחד (דרגת יציאה 0) בלבד.

כמו כן, מגדירים לכל קודקוד (שלב) את זמן סיומו המתוכנן, $t[v]$.

הפונקצייה **topologicalSort** (G) מחזירה את מערך קודקודי הגרף, הממוין בסדר טופולוגי.

הפונקצייה **children** (v) מחזירה את רשימת הבנים של קודקוד v בגרף G .

הפונקצייה **reverseArray** (**array**) מחזירה את מערך **array** בסדר הפוך.

באלגוריתם שלהלן חסרים שמונה ביטויים, המסומנים במספרים בין (1) ל-(8). עקבו אחר האלגוריתם וענו על תשעת הסעיפים הבאים אחריו (לכל סעיף – 2 נקודות).

```
criticalPath (G)
  for each v in V
    t[v] = 0
    parents[v] = 0
  sortedVertices = _____ (1)
  for each vertex u in _____ (2)
    for each vertex v in _____ (3)
      if (t[v] _____ (4) _____)
        t[v] = t[u] + w(u,v)
        parents[v] = _____ (5)
  startVertex = sortedVertices[1] // תחילת הפרויקט
  i = 0
  u = sortedVertices[|V|] // סיום הפרויקט
  while (u != _____ (6) _____ && i < |V|) do // |V| the total number of vertices
    reverseCriticalPath [i] = u
    u = _____ (7) _____
    i = i + 1
  return t[_____ (8) _____], reverseArray (reverseCriticalPath)
```

(1) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (1)?

1. topologicalSort (G)
2. children (u)
3. sortedVertices
4. parents

(2) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (2)?

1. topologicalSort (G)
2. children (u)
3. sortedVertices
4. parents

(3) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (3)?

1. `topologicalSort (G)`

2. `children (u)`

3. `sortedVertices`

4. `parents`

(4) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (4)?

1. $== t[u] + w(u, v)$

2. > 0

3. $< t[u] + w(u, v)$

4. $> t[u] + w(u, v)$

(5) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (5)?

1. `startVertex`

2. `u`

3. `sortedVertices[|V|]`

4. `parents[u]`

(6) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (6)?

1. `startVertex`

2. `u`

3. `sortedVertices[|V|]`

4. `parents[u]`

(7) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (7)?

1. `startVertex`

2. `u`

3. `sortedVertices[|V|]`

4. `parents[u]`

(8) מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (8)?

1. startVertex

2. u

3. sortedVertices[|V|]

4. parents[u]

(9) בהנחה שהפונקצייה children פועלת בסיבוכיות $O(1)$, מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם המובא לעיל?

1. $O(V)$

2. $O(V^2)$

3. $O(V + E)$

4. $O(V \cdot E)$

פרק שני (60 נקודות)

ענו על שלוש מן השאלות 2-5 (לכל שאלה – 20 נקודות).
 בשאלות רב-ברירה, הקיפו בעיגול את הספרה המייצגת את התשובה הנכונה.
 את התשובות יש לסמן אך ורק על גבי דף התשובות שבנספח א'.

שאלה 2

ענו על כל הסעיפים א'-י' (לכל סעיף – 2 נקודות).

א. נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסוים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{25}\right) + 5\sqrt{n} \log n$$

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

1. $\Theta(n^2 \log n)$

2. $\Theta(\sqrt{n} \log^2 n)$

3. $\Theta(n^5 \log n)$

4. $\Theta(\sqrt{n} \log^5 n)$

ב. נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסוים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 3T(n-1)+1, & n>1 \end{cases}$$

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

1. $O(n)$

2. $O(n^2)$

3. $O(n^3)$

4. $O(3^n)$

ג. נתונה שפה שבה אלף-בית הוא $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. נסמן ב- $f(n)$ את מספר המילים בשפה זו, באורך n , שאין בהן שתי אותיות **b** סמוכות.

מהי הנוסחה הרקורסיבית בעבור $f(n)$?

1. $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

2. $f(n) = 2f(n-1) + 2f(n-2)$

3. $f(n) = 3f(n-1) + 3f(n-2)$

4. $f(n) = 3(n-1) + 2f(n-2)$

הסעיפים ז'-ח' מתייחסים לבעיה הבאה:

נתון גרף **לא מכוון**, $G = (V, E)$, כאשר $|V| = n$ ו- $|E| = m$, כך שלכל קודקוד יש לפחות שני שכנים.

לפניכם אלגוריתם המכוון את קשתות הגרף כך שדרגת היציאה של כל קודקוד תהיה לפחות 1.

באלגוריתם שלהלן חסרים **ארבעה** ביטויים, המסומנים במספרים בין (1) ל-(4). עקבו אחר האלגוריתם וענו על חמשת הסעיפים הבאים אחריו.

שימו לב: האלגוריתם חייב להיות יעיל ככל האפשר.

נריץ את האלגוריתם _____ (1).

נכוון את קשתות העץ שנוצר מאב לבן.

עבור כל קודקוד v , שהוא _____ (2), נכוון את אחת הקשתות

_____ (3) שיוצאות ממנו, מ- v לשכנו.

את שאר הקשתות, נכוון _____ (4).

ז. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (1)?

1. קרוסקל (Kruskal)

2. DFS

3. מיון טופולוגי

4. למציאת רק"ח (רכיבי קשירות חזקה)

ה. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (2)?

1. עלה בעץ שנוצר

2. בעל דרגה 1

3. בעל דרגה 2

4. מייצג רק"ח (רכיבי קשירות חזקה)

ו. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (3)?

1. הקדמיות

2. החוצות

3. האחוריות

4. של העץ

ז. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (4)?

1. בהכרח לשורש של העץ שהקודקוד נמצא בו
2. בהכרח לאב קדמון
3. בהכרח לצאצא
4. באופן שרירותי

ח. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם המובא לעיל?

1. $O(n)$
2. $O(m)$
3. $O(n^2)$
4. $O(m^2)$

הסעיפים ט'-י' מתייחסים לבעיה הבאה:

נתונות שתי סדרות שהתקבלו מסריקת עץ בינארי **כלשהו** בסדר Preorder ו-Inorder:

Preorder: 5 , 12 , 4 , 3 , 10 , 14 , 9 , 16 , 30 , 25 , 20 , 1 , 2

Inorder: 3 , 4 , 10 , 12 , 9 , 14 , 16 , 5 , 25 , 30 , 1 , 20 , 2

ט. מהי הסדרה Postorder עבור אותו עץ? (יש לקרוא משמאל לימין).

1. 3 , 10 , 4 , 12 , 9 , 16 , 14 , 1 , 2 , 25 , 20 , 30 , 5
2. 3 , 10 , 4 , 9 , 16 , 14 , 12 , 1 , 2 , 25 , 20 , 30 , 5
3. 3 , 10 , 4 , 9 , 16 , 14 , 12 , 25 , 1 , 2 , 20 , 30 , 5
4. 3 , 10 , 9 , 16 , 4 , 14 , 12 , 25 , 1 , 2 , 20 , 30 , 5

י. מהי הטענה שאיננה נכונה לגבי העץ הבינארי המתואר?

1. 25 הוא עלה בעץ
2. תת-העץ השמאלי הוא עץ חיפוש
3. העץ הוא עץ מלא
4. העץ הוא עץ מאוזן

שאלה 3

ענו על כל הסעיפים א'–י' (לכל סעיף – 2 נקודות).

א. נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסוים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + 7n + \log(n^2)$$

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

1. $\Theta(n^{\log_5 3} \log n)$

2. $\Theta(n^{\log_5 3})$

3. $\Theta(n \log^2 n)$

4. $\Theta(n)$

הסעיפים ב'–ו' מתייחסים לבעיה הבאה:

חברת "סטרימינג" מבקשת לבנות מבנה נתונים שבו מוחזקות כתובות ה-IP של כל 200 מיליון מנויי, השמורים לפי מספרי הזהות של כל מנוי. נתון כי:

- לכל מנוי יש מספר זהות שונה.
- איתור לקוח מתבצע באופן תדיר, בכל כניסה של לקוח למערכת.
- הוספת לקוח חדש מתבצע רק פעם אחת עבור כל לקוח חדש.
- על המערכת להיות גמישה מספיק כדי להכיל לקוחות חדשים.

ב. מהו מבנה הנתונים היעיל ביותר לביצוע המשימה המתוארת?

1. מערך ממוין על פי מספרי הזהות, כאשר כל תא במערך מכיל את מספר הזהות של הלקוח ואת ה-IP שלו.
2. טבלת גיבוב, שכל איבר בה מכיל את מספר הזהות של הלקוח כמפתח ואת ה-IP של הלקוח כערך.
3. רשימה מקושרת ממוינת על פי מספרי הזהות, כאשר כל חוליה ברשימה מכילה את מספר הזהות של הלקוח ואת ה-IP שלו.
4. עץ AVL הבנוי כעץ חיפוש לפי מפתח של מספר הזהות, כאשר כל צומת מכיל את מספר הזהות של הלקוח ואת ה-IP שלו.

ג. אליס בחרה במערך ממוין.

מה תהיה סיבוכיות זמן הריצה של איתור לקוח קיים ושל הוספת לקוח חדש? שימו לב: הביטוי הימני בכל אחת מאפשרויות התשובה מבטא את סיבוכיות האיתור, והשמאלי את סיבוכיות ההוספה.

1. $O(1)$ ו- $O(1)$

2. $O(\log n)$ ו- $O(\log n)$

3. $O(n)$ ו- $O(\log n)$

4. $O(n)$ ו- $O(n)$

ז. בילבי בחרה בטבלת גיבוב.

מה תהיה סיבוכיות זמן הריצה (במקרה הממוצע) של איתור לקוח קיים ושל הוספת לקוח חדש? שימו לב: הביטוי הימני בכל אחת מאפשרויות התשובה מבטא את סיבוכיות האיתור, והשמאלי את סיבוכיות ההוספה.

1. $O(1)$ ו- $O(1)$

2. $O(\log n)$ ו- $O(\log n)$

3. $O(n)$ ו- $O(\log n)$

4. $O(n)$ ו- $O(n)$

ה. ג'וני בחרה ברשימה מקושרת ממוינת.

מה תהיה סיבוכיות זמן הריצה של איתור לקוח קיים ושל הוספת לקוח חדש? שימו לב: הביטוי הימני בכל אחת מאפשרויות התשובה מבטא את סיבוכיות האיתור, והשמאלי את סיבוכיות ההוספה.

1. $O(1)$ ו- $O(1)$

2. $O(\log n)$ ו- $O(\log n)$

3. $O(n)$ ו- $O(\log n)$

4. $O(n)$ ו- $O(n)$

ו. דורותי בחרה בעץ AVL.

מה תהיה סיבוכיות זמן הריצה של איתור לקוח קיים ושל הוספת לקוח חדש? שימו לב: הביטוי הימני בכל אחת מאפשרויות התשובה מבטא את סיבוכיות האיתור, והשמאלי את סיבוכיות ההוספה.

1. $O(1)$ ו- $O(1)$

2. $O(\log n)$ ו- $O(\log n)$

3. $O(n)$ ו- $O(\log n)$

4. $O(n)$ ו- $O(n)$

הסעיפים ז'–ט' מתייחסים לבעיה הבאה:

חברת "סטרימיקס" מעוניינת לאחסן את הסרטים המבוקשים ביותר באתר שהגישה אליו היא המהירה ביותר, כדי לקצר ללקוחותיה את הזמן הדרוש להורדת סרטים.

כדי לדעת מה גודל הזיכרון שעליה להקצות לסרטים המבוקשים ביותר, החברה רוצה לבדוק אם יש סרט המועדף על יותר מחצי מהמנויים, וכן אם יש סרט נוסף המועדף על יותר משליש מהמנויים. בבעלות החברה 5,000 סרטים שונים, שלכל אחד מהם מספר סידורי בין 1 ל-5,000.

עבור כל מנוי, החברה שומרת במערך A , שגודלו n (כמספר מנויי החברה), את מספר הסרט המועדף עליו (עבור כל מנוי יכול להישמר סרט מועדף אחד בלבד).

לדוגמה, אם מנוי 34564 מעדיף את סרט 1043, אז $A[34564] = 1043$.

לפניכם אלגוריתם ליניארי, הפותר את הבעיה באופן הבא:

אם יש סרט המועדף על יותר מחצי מהמנויים, האלגוריתם שומר את מספרו במשתנה $M1$. אם אף סרט לא מועדף על יותר מחצי מהמנויים, אזי $M1 = 0$. אם יש סרט **נוסף** המועדף על יותר משליש מהמנויים, מספרו שמור במשתנה $M2$. במקרה שאין סרט כזה, $M2 = 0$.

באלגוריתם שלהלן חסרים **שלושה** ביטויים, המסומנים במספרים בין (1) ל-(3). עקבו אחר האלגוריתם וענו על שלושת הסעיפים הבאים אחריו.

Algorithm (A,n)

```

M1= _____ (1)
Count=0;
For i=1 to n
    If A[i]=M1
        Count=Count+1;
If Count <=n/2
    M1=0;
M2= _____ (2)
If (M2≠M1)
    Count=0;
    For i=1 to n
        If A[i]=M2
            Count=Count+1;
        If Count>n/3
            Return M1,M2;
M2= _____ (3)
If (M2≠M1)
    Count=0;
    For i=1 to n
        If A[i]=M2
            Count=Count+1;
        If Count>n/3
            Return M1,M2;
Return M1,0

```

ז. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (1)?

1. $\text{Select}(A, n)$
2. $\text{Select}(A, n/3)$
3. $\text{Select}(A, n/2)$
4. $\text{Select}(A, n/4)$

ח. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (2)?

1. $\text{Select}(A, n)$
2. $\text{Select}(A, n/3)$
3. $\text{Select}(A, n/2)$
4. $\text{Select}(A, n/4)$

ט. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (3)?

1. $\text{Select}(A, n)$
2. $\text{Select}(A, n/4)$
3. $\text{Select}(A, n/2)$
4. $\text{Select}(A, 2n/3)$

י. נתונה ערמת מינימום הממומשת על ידי מערך A . איזו מהטענות הבאות **איננה נכונה**?

1. בהינתן אינדקס i ניתן לבנות אלגוריתם למציאת העוקב של $A[i]$ (הבא בגודלו) בסיבוכיות $O(1)$.
2. הסיבוכיות של הכנסת ערך חדש לערמה היא $O(1)$ במקרה הטוב.
3. בהינתן מערך A בגודל n ניתן לבנות אלגוריתם לבדיקה אם המערך הוא ערמה, בסיבוכיות $O(n)$ במקרה הגרוע.
4. הסיבוכיות של חיפוש ערך בערמה היא $O(1)$ במקרה הטוב.

שאלה 4

ענו על כל הסעיפים א'–י' (לכל סעיף – 2 נקודות).

א. נתון קטע קוד:

```
s=(int) sqrt (n) ;  
for (i=1; i<=n; i+=s)  
{  
    for(j=1;j<=n;j*=s)  
        printf ("*");  
    printf ("\n");  
}
```

כמו כן, נתון כי סיבוכיות של הדפסת תו אחד וחישוב $\text{sqrt}(x)$ הוא $O(1)$.
מהי סיבוכיות זמן הריצה של קטע הקוד הנתון כפונקצייה של n ?

1. $\Theta(n\sqrt{n})$

2. $\Theta(n \log n)$

3. $\Theta(\sqrt{n})$

4. $\Theta(n)$

ב. נתון הביטוי $*+ab+c/dt$ בצורת prefix.

לפניכם ביטויים בצורת postfix. מאיזה מהם מתקבל הביטוי המופיע לעיל? (יש לקרוא משמאל לימין).

1. $ab+c+d/t*$

2. $ab+cd/t+*$

3. $ab+cdt+/*$

4. $ab+cdt/+*$

הסעיפים ג'-ד' מתייחסים לבעיה הבאה:

עבור מחרוזת S מעל אלף-בית $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ נתון כי קוד הופמן של האותיות הוא:

$$a = 011, \quad b = 010, \quad c = 00, \quad d = 10, \quad e = ?$$

הניחו שסיבית הקוד לצומת הימני היא 1, ולצומת השמאלי היא 0.

ג. איזה מהבאים הוא קוד ההופמן של האות e ? (יש לקרוא משמאל לימין).

1. 101

2. 110

3. 11

4. 01

ד. האות a מופיעה **חמש** פעמים, האות b מופיעה **שתי** פעמים, האות c מופיעה **חמש** פעמים והאות e מופיעה **שבע** פעמים.

נתון כי מספר הופעות של "אח" שמאלי **איננו** גדול יותר ממספר ההופעות של "אח" ימני.

מהי השכיחות האפשרית לאות d ?

1. חמש פעמים

2. שש פעמים

3. שבע פעמים

4. שמונה פעמים

הסעיפים ה'-ח' מתייחסים לבעיה הבאה:

נתון גרף לא מכוון, **קשיר** $G = (V, E)$, ו- $\emptyset \neq A \subset E$.

לפניכם אלגוריתם הבודק אם קיים עץ פורש של G , המכיל את כל הצלעות מהקבוצה A .

באלגוריתם שלהלן חסרים **שני** ביטויים, המסומנים במספרים בין (1) ל-(2). עקבו אחר האלגוריתם וענו על ארבעת הסעיפים הבאים אחריו.

נגדיר $w: E \rightarrow \{0, 1\}$ לפי הכללים:

$$w(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{if } (u, v) \in A \\ 1, & \text{if } (u, v) \notin A \end{cases}$$

אם $|A| > \underline{\hspace{2cm}} (1)$
החזר "לא קיים"

$T = \text{Kruskal}(G)$

אם $\underline{\hspace{2cm}} (2)$
החזר "קיים".

אחרת,
החזר "לא קיים"

ה. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (1) ?

1. $|E|/2$

2. $|E|-1$

3. $|V|/2$

4. $|V|-1$

ו. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (2) ?

1. $w(T) + |A| = |V|$

2. $w(T) + |A| = |V| - 1$

3. $w(T) = |A|$

4. $w(T) = |E| - |A|$

ז. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם המובא לעיל?

1. $O(|V| + |E|)$

2. $O(|V|^2)$

3. $O(|E|^2)$

4. $O(|E| \log |E|)$

ח. אחד התלמידים טען שאלגוריתם זה לא יעיל, וכי אפשר לבנות במקומו אלגוריתם בסיבוכיות $O(|V|)$ המשתמש באלגוריתם אחר פעם אחת. מהו האלגוריתם המשני (שבו משתמש האלגוריתם הראשי) שאליו התכוון התלמיד?

1. BFS

2. DFS

3. PRIM

4. Dijkstra

ט. מהי כמות הקודקודים המינימלית בעץ מלא בגובה h (כאשר הגובה נמדד בקשתות)?

1. $2^h - 1$

2. $2h$

3. $2h + 1$

4. $2h - 1$

י. נתונה נוסחת הנסיגה: $T(n) = aT\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

מבין הערכים הבאים, מהו הערך הנמוך ביותר של משתנה a שעבורו תתקבל סיבוכיות ריצה גדולה מ- n^2 ?

1. 3

2. 6

3. 9

4. 27

שאלה 5

ענו על כל הסעיפים א'–י' (לכל סעיף – 2 נקודות).

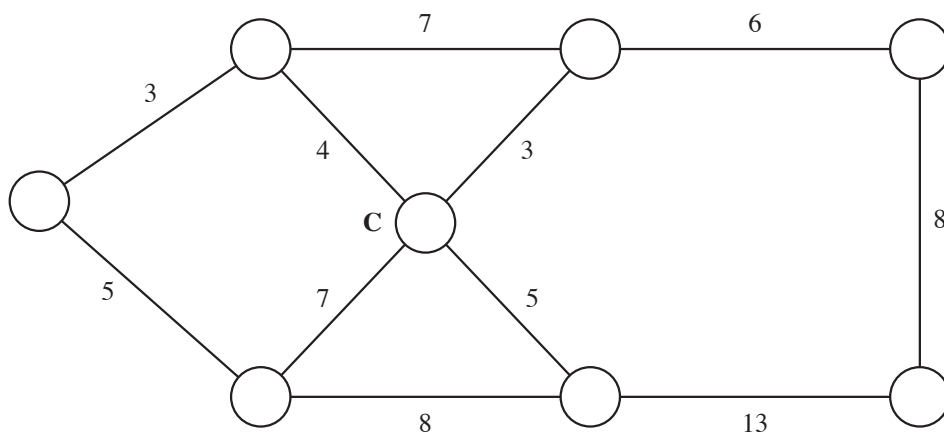
א. נתונה פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם מסוים, הפועל על קלט שגודלו n :

$$T(n) = 6T(n-1) - 9T(n-2) + 2n + 8$$

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

1. $O(n)$
2. $O(n^3)$
3. $O(n^3)$
4. $O(n^{2^n})$

ב. נתון גרף:



לצורך מציאת עץ פורש מינימלי (עפ"מ), מפעילים על הגרף הנתון אלגוריתם קרוסקל (Kruskal), ובנפרד מפעילים עליו אלגוריתם PRIM החל מקודוד C.

בחרו את הטענה הנכונה עבור הגרף הנתון:

1. סדר המשקלים של צלעות העץ ש-PRIM הכניס לעפ"מ הוא **בהכרח זהה** לסדר המשקלים של צלעות העץ שקרוסקל הכניס לעפ"מ.
2. סדר המשקלים של צלעות העץ ש-PRIM הכניס לעפ"מ הוא **בהכרח שונה** מסדר המשקלים של צלעות העץ שקרוסקל הכניס לעפ"מ.
3. סדר המשקלים של צלעות העץ ש-PRIM הכניס לעפ"מ הוא **הפוך** לסדר המשקלים של צלעות העץ שקרוסקל הכניס לעפ"מ.
4. קבוצת צלעות העץ ש-PRIM הכניס לעפ"מ היא **בהכרח שונה** מקבוצת צלעות העץ שקרוסקל הכניס לעפ"מ.

ג. לתוך עץ **חיפוש** בינארי ריק הוכנסו האיברים הבאים (יש לקרוא משמאל לימין):

4, 2, 1, 3, 7, 5, 6

מהי הטענה הנכונה לגבי העץ המתקבל?

1. הוא מלא, אך לא שלם
2. הוא שלם
3. הוא אינו מלא, אך תת העץ השמאלי שלו מלא
4. הוא אינו מלא, אך תת העץ הימני שלו מלא

ד. לפניכם טבלת שכיחויות:

האות	השכיחות
a	50
c	10
i	40
r	13
s	20
t	25
u	15

מה יהיה קידוד המילה struct בהתאם לאלגוריתם הופמן?
הניחו שסיבית הקוד לצומת הימני היא 1, ולצומת השמאלי היא 0.

1. 00110110010001000101
2. 0011010010101000101
3. 00110100101101000101
4. 00110110000001000101

הסעיפים ה'–ו' מתייחסים לבעיה הבאה:

- מערכת הפעלה מסוימת מנהלת את הפעלת המשימות שלה על ידי ערמת מינימום, שבה:
- כל משימה מקבלת רמת עדיפות (priority), מ־1 עד 5, כאשר רמה 1 היא העדיפה ביותר.
 - מבין שתי משימות בעלות רמת עדיפות זהה תועדף המשימה המוקדמת יותר.
- ערמת המינימום תיבנה על סמך שני הכללים הללו, מתוך המשימות הנכנסות למערכת ההפעלה. הערמה ממומשת על ידי עץ בינארי.

נתונה רשימת משימות:

מזהה המשימה	רמת עדיפות	שעת הכניסה למערכת
1	3	10:00
2	5	10:05
3	3	10:10
4	2	10:15
5	5	10:20
6	1	10:25
7	3	10:30
8	4	10:35
9	2	10:40
10	5	10:45

- ה. בהנחה שכל המשימות הוכנסו לערמת המינימום לפני שמשימה כלשהי נשלפה ממנה, מהן המשימות הנמצאות בעלים של העץ המממש את הערמה?
- יש למנות מהרמה הקטנה ביותר שיש בה עלים, ומשמאל לימין.
- זכרו: רמה של שורש עץ היא 0, הבנים שלו נמצאים ברמה 1, וכו'.

מהי התשובה הנכונה?

1. 6, 7, 8, 9, 10
2. 7, 8, 2, 5, 10
3. 3, 7, 2, 8, 10
4. 6, 9, 4, 1, 5

- ו. לאחר הוצאת שלוש משימות מועדפות, אילו משימות יימצאו בעלים של העץ?

1. 7, 2, 5, 10
2. 2, 5, 10, 7
3. 7, 8, 5, 10
4. 8, 7, 5, 10

הסעיפים ז'–ט' מתייחסים לבעיה הבאה:

נתונה סדרה של מחיריה היומיים של מניה בבורסה, ונדרש לחשב את טווח עליית המחיר של המניה עבור כל יום. טווח עליית המחיר עבור יום i מוגדר כמספר המרבי של ימים רצופים לפני היום הנתון, שעבורם מחיר המניה היומי נמוך או שווה למחיר ביום הנתון – ועוד היום הנתון עצמו.

לדוגמה:

אם מערך המחירים הוא: $\text{Price} = [31, 27, 14, 21, 30]$

אז מערך טווחי העלייה הוא: $T = [1, 1, 1, 2, 4]$

הסבר:

ביום הראשון (31), השני (27) והשלישי (14) אין ימים קודמים שבהם מחיר המניה היה נמוך או שווה למחיר ביום הנתון, ולכן הטווח הוא 1 (=היום הנתון).

ביום הרביעי (21) טווח העלייה הוא 2, כי יש יום אחד (השלישי) שבו המחיר היה נמוך יותר (14).

ביום החמישי (30) טווח העלייה הוא 4, כי בימים השני, השלישי והרביעי המחירים היו נמוכים יותר.

לפניכם אלגוריתם לבניית מערך של טווחי עלייה.

האלגוריתם משתמש במחסנית עזר המכילה אינדקסים (מספרים טבעיים), שעבורה מוגדרות הפונקציות הבאות:

- $\text{Init_Stack}(S)$ – אתחול המחסנית
- $\text{Is_empty}(S)$ – בדיקה אם המחסנית ריקה
- $\text{Top}(S)$ – קריאת ערך בראש המחסנית
- $\text{Pop}(S)$ – הוצאת ערך מראש המחסנית
- $\text{Push}(S,i)$ – הכנסת ערך למחסנית

באלגוריתם שלהלן חסרים **שלושה** ביטויים, המסומנים במספרים בין (1) ל-(3). עקבו אחר האלגוריתם וענו על שלושת הסעיפים הבאים אחריו.

Algorithm(Price, n)

Init_Stack(S)

Push(S, 1)

T[1]=1

for i=2 to n

{

while (not Is_empty(S) and _____ (1) _____)

Pop(S);

if (Is_empty(S))

T[i]=i;

else

T[i]= _____ (2) _____;

_____ (3) _____;

}

ז. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (1)?

1. $\text{Price}[i-1] \leq \text{Price}[i]$

2. $\text{Price}[\text{Pop}(S)] \leq \text{Price}[i]$

3. $\text{Price}[\text{Top}(S)] \leq \text{Price}[i]$

4. $\text{Top}(S) \leq \text{Price}[i]$

ח. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (2)?

1. $i - \text{Top}(S)$

2. $\text{Top}(S)$

3. $i - \text{Pop}(S)$

4. $i - 1$

ט. מהו הביטוי החסר במקום המסומן בספרה (3)?

1. $\text{Push}(S, i+1)$

2. $\text{Push}(S, i)$

3. $\text{Pop}(S)$

4. $\text{Push}(S, \text{Price}[i])$

י. תהי `mysort` פונקצייה המקבלת מערך לא ממוין של n מספרים ממשיים, ומחזירה קבוצה ממוינת של $\sqrt{n}$ הערכים הנמוכים ביותר במערך.

מהי סיבוכיות הריצה של המימוש היעיל ביותר של הפונקצייה `mysort`?

1. $O(n)$

2. $O(\sqrt{n})$

3. $O(\sqrt{n} \log n)$

4. $\Omega(n \log n)$

בהצלחה!

מקום מציבה נכון

נספח א': דף תשובות

לשאלון 714911, אביב תשפ"ה

בכל סעיף הקיפו בעיגול את הספרה המייצגת את התשובה הנכונה.
הדביקו את מדבקת הנבחן שלכם במקום המיועד לכך, והדקו את הדף הזה אל מחברת הבחינה.

פרק ראשון (40 נקודות)

שאלה 1 – שאלת חובה (40 נקודות)

ענו על כל הסעיפים א' – ג'

סעיף ג	סעיף ב	סעיף א
(1) 1 2 3 4	(1) 1 2 3 4	(1) 1 2 3 4
(2) 1 2 3 4	(2) 1 2 3 4	(2) 1 2 3 4
(3) 1 2 3 4	(3) 1 2 3 4	(3) 1 2 3 4
(4) 1 2 3 4	(4) 1 2 3 4	(4) 1 2 3 4
(5) 1 2 3 4	(5) 1 2 3 4	(5) 1 2 3 4
(6) 1 2 3 4		(6) 1 2 3 4
(7) 1 2 3 4		
(8) 1 2 3 4		
(9) 1 2 3 4		

פרק שני (60 נקודות)

ענו על שלוש מבין השאלות 2–5 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שאלה 3	שאלה 2
א. 1 2 3 4	א. 1 2 3 4
ב. 1 2 3 4	ב. 1 2 3 4
ג. 1 2 3 4	ג. 1 2 3 4
ד. 1 2 3 4	ד. 1 2 3 4
ה. 1 2 3 4	ה. 1 2 3 4
ו. 1 2 3 4	ו. 1 2 3 4
ז. 1 2 3 4	ז. 1 2 3 4
ח. 1 2 3 4	ח. 1 2 3 4
ט. 1 2 3 4	ט. 1 2 3 4
י. 1 2 3 4	י. 1 2 3 4

שאלה 5	שאלה 4
א. 1 2 3 4	א. 1 2 3 4
ב. 1 2 3 4	ב. 1 2 3 4
ג. 1 2 3 4	ג. 1 2 3 4
ד. 1 2 3 4	ד. 1 2 3 4
ה. 1 2 3 4	ה. 1 2 3 4
ו. 1 2 3 4	ו. 1 2 3 4
ז. 1 2 3 4	ז. 1 2 3 4
ח. 1 2 3 4	ח. 1 2 3 4
ט. 1 2 3 4	ט. 1 2 3 4
י. 1 2 3 4	י. 1 2 3 4

נספח ב': מילון מונחים

לשאלון 714911, אביב תשפ"ה

המונח	תרגום המונח		
	ערבית	רוסית	אנגלית
אחזור	استرجاع	Возврат, извлечение	retrieval
איבר	مُتَغَيِّر / عضو	Элемент	item
אקראי	عشوائي	Случайный	random
אתחול	قيمة بدائية	Инициализация	initialization
זמן ריצה	مدّة التنفيذ	Время работы	run time
טבלת ערבול (גיבוב)	جدول الخلط	Хеш-таблица	hash table
טיפוס	نوع	Тип	type
מחסנית	بَاغَة	Стек	stack
מטריצת סמיכויות	جدول الحدود الزميلة	Матрица смежности	adjacency matrix
מיון טופולוגי	تصنيف	Топологическая сортировка	topological sorting
מסלול	مسار	Путь	path
מערך דינמי	مصفوفة غير ثابتة	Динамический массив	dynamic array
מצביע	مُؤَشِّر	Указатель	pointer
משתנה גלובלי	مُتَغَيِّر عامّ	Глобальная переменная	global variable
סדרה	سلسلة	Последовательность	series
סיבוכיות	تعقيد	Сложность (вычислений)	complexity
עדיפות	أولوية	Приоритет	preference
עץ חיפוש בינארי מאוזן	شجرة بحث ثنائي متوازنة	сбалансированное двоичное дерево поиска	balanced binary search tree
ערך מוחלט	قيمة مُطلَقة	модуль	absolute value
ערימה	كومة	Куча	heap
ערימה בינארית	كومة ثنائية	Двоичная куча	binary heap
פונקציית רקורסיבית	دالة أو عملية تراجعية	Рекурсивная функция	recursive function
צומת	مُفْتَرَق	Узел	node
קודקוד	رأس	вершина	vertex
קשת	وصلة	Дуга	arc
רשומה	سجِّل	Запись (элемент структуры данных)	record
שדה קישור	حقل رابط	Поле, содержащее ссылку	linking field
שורש	جذر	Корень	root
תת-עץ	شجرة فرعية	Поддерево	sub-tree