

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Résolvez les exercices en suivant ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : quatre heures et quart.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire en quatre parties comporte huit exercices.

Première partie — Exercices courts

Deuxième partie — Récurrence, suites et probabilités

Troisième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Quatrième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez cinq exercices, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties.

$5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les fonctionnalités de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des fonctionnalités de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointés au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — שאלות קצרות

פרק שני — אינדוקציה, סדרות והסתברות

פרק שלישי — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של

פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות

טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חסור פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez cinq des exercices 1-8, au moins un exercice de la première ou de la deuxième partie, et au moins un exercice de chacune des troisième et quatrième parties (20 points par question).

Attention : si vous résolvez plus de cinq exercices, seuls les cinq premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie — Exercices courts

1. Répondez à deux des quatre articles א-ג ci-dessous. Si vous répondez à plus de deux articles, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

א. On sait que l'égalité $8 + 24 + 48 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ est vérifiée pour $n = 2$.
 a est un paramètre.

(1) Déterminez la valeur de a .

(2) Pour la valeur de a que vous avez déterminée, démontrez par récurrence ou par toute autre méthode que l'égalité donnée est vérifiée pour tout n entier naturel pair.

ב. Tous les candidats qui veulent être acceptés à l'université doivent passer deux examens.

On sait que le nombre de candidats qui ont réussi uniquement le premier examen est 4 fois plus petit que le nombre de candidats qui ont réussi les deux examens.

$\frac{8}{9}$ des candidats qui ont réussi le deuxième examen, ont également réussi le premier examen.

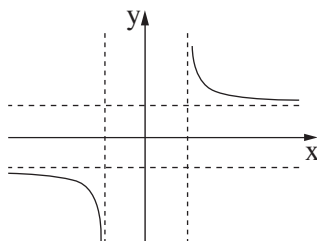
On note p la probabilité de choisir au hasard un candidat qui a réussi uniquement le premier examen.

(1) Exprimez en fonction de p la probabilité de choisir au hasard un candidat qui a réussi au moins un examen.

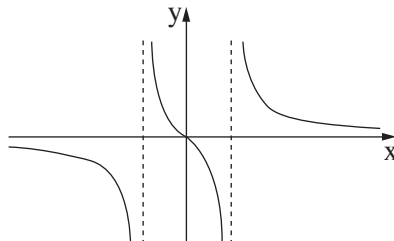
(2) Sachant qu'on a choisi au hasard un candidat qui a réussi au moins un examen, quelle est la probabilité que le candidat choisi ait réussi les deux examens ?

ג. Soit les fonctions $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$.

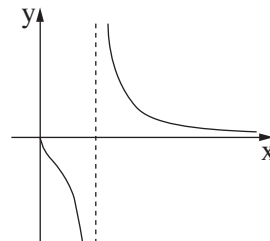
- (1) Déterminez le domaine de définition de chacune des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.
- (2) Faites correspondre chacune des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ au graphe qui la représente parmi les graphes 1-5 ci-dessous. Justifiez vos réponses.



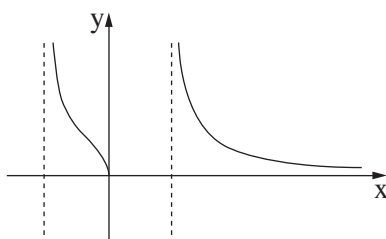
3



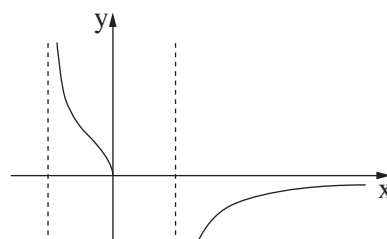
2



1



5



4

7. La fonction $f(x)$ et sa fonction dérivée $f'(x)$ sont définies pour tout x .

La figure ci-contre représente le graphe de la fonction $f(x)$.

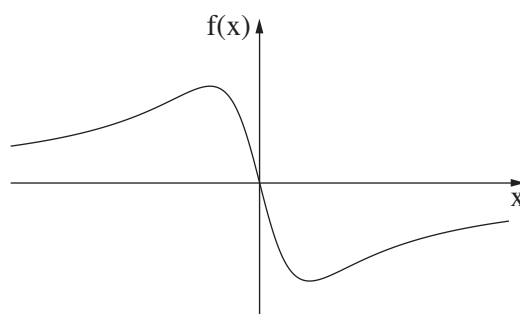
On sait que la fonction $f(x)$ est impaire et qu'elle admet un unique point de minimum dont les coordonnées sont $(3, -6)$.

La fonction $f(x)$ et la fonction dérivée $f'(x)$ admettent une asymptote horizontale $y = 0$.

- (1) Tracez une esquisse possible du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$.

Soit la fonction $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.

- (2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $g(x)$ avec l'axe des abscisses.
- (3) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses.



Deuxième partie – Récurrence, suites et probabilités

2. Soit une suite géométrique A dont les termes sont $a_1, a_2, a_3, \dots$ et qui comporte m termes (m est un nombre entier naturel supérieur à 4).

Données : tous les termes de la suite A sont négatifs.

La somme des $m - 4$ derniers termes de la suite vaut 16 fois la somme des $m - 4$ premiers termes de la suite.

- ⋈. (1) Déterminez la raison de la suite A .
- (2) La suite A est-elle croissante, décroissante ou ni croissante ni décroissante ? Justifiez votre réponse.

On a prolongé la suite A de manière à former une suite géométrique infinie.

Soit une suite infinie B dont les termes vérifient $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ pour tout n entier naturel. k est un paramètre différent de 0.

- ⋈. Démontrez que la suite B est une suite géométrique, puis exprimez sa raison en fonction de k .

On sait que la somme de la suite B est convergente.

- ⋈. Déterminez l'intervalle possible des valeurs de k .

Données : la raison de la suite B vaut $\frac{1}{4}$.

La somme de la suite B vaut -9 .

- ⋈. Déterminez la valeur de k et la valeur de b_1 .

On a effacé une valeur sur trois de la suite B ($b_3, b_6, b_9 \dots$).

- ⋈. Déterminez la somme des termes restants.

3. Le pot ⋈ contient 10 boules rouges et 15 boules jaunes, et le pot ⚭ contient uniquement des boules rouges.

Dana choisit au hasard un pot puis en tire une boule au hasard.

Si la boule est jaune, elle tire au hasard une deuxième boule du même pot (tirage sans remise).

Si la première boule est rouge, elle remet cette boule dans le pot puis tire à nouveau une boule au hasard du même pot.

- ⋈. On sait que Dana a tiré deux boules de la même couleur. Quelle est la probabilité que ces deux boules soient jaunes ?

Dana remet dans le pot les boules qu'elle a tirées.

Yaël effectue le processus suivant :

elle choisit un pot au hasard, elle en tire une boule au hasard puis la remet dans le pot.

Yaël répète ce processus jusqu'à ce qu'elle tire une boule rouge, remet la boule dans le pot puis cesse de tirer des boules.

- ⋈. Déterminez la probabilité que Yaël ait effectué ce processus 6 fois exactement.

On a transféré une partie des boules du pot ⚭ au pot ⋈.

Après cela on a choisi au hasard un pot puis on en a tiré une boule au hasard.

On sait qu'à la suite de ce transfert, la probabilité que la boule tirée soit rouge est de $\frac{19}{24}$.

- ⋈. Est-il possible qu'avant le transfert, le pot ⚭ contenait 10 boules ? Justifiez votre réponse.

Troisième partie – Géométrie et trigonométrie dans le plan

4. Dans le quadrilatère BKCD le côté KB est parallèle au côté CD .

Le côté CD est une corde d'un cercle et le côté KB est tangent à ce cercle au point K .

Le côté BD coupe le cercle en un point A .

La diagonale BC coupe la corde AK en un point E (voir figure).

⌘. Démontrez que $\triangle ABK \sim \triangle AKC$.

Ⓐ. Démontrez que $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.

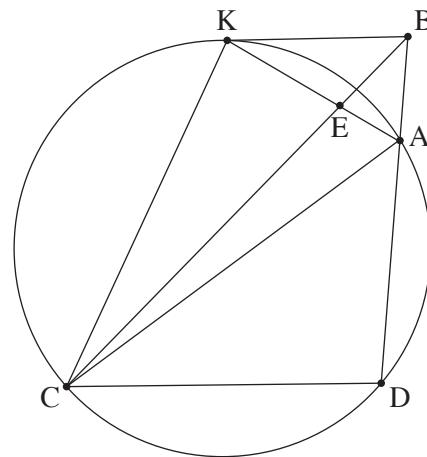
Donnée : $BE = \frac{1}{4}CE$.

Ⓜ. Déterminez le rapport $\frac{AK}{AB}$.

Donnée : l'aire du quadrilatère ABKC vaut 18 .

On note S l'aire du triangle AEB .

Ⓣ. Exprimez l'aire du triangle KEC en fonction de S .



5. Soit un cercle de centre O et de rayon R .

À partir du point A , on trace deux droites AB et AC tangentes au cercle.

Le point E est le point de tangence de la droite AC avec le cercle, comme décrit sur la figure.

Données : $BO \perp AO$, $AE = CE$.

On note 2β l'angle BAC .

⌘. Exprimez la longueur de AB en fonction de R et de β .

On sait que la longueur de AB vaut $2,5R$,

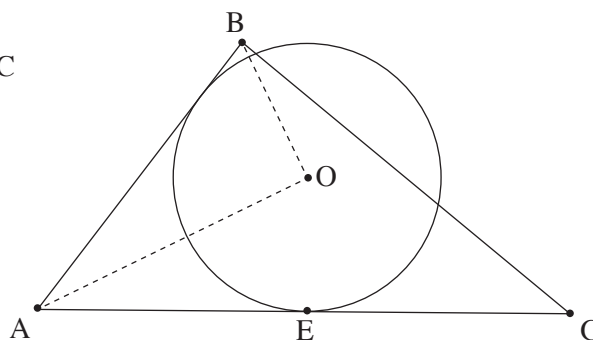
et que l'angle BAC est un angle aigu.

Ⓐ. Déterminez la valeur de β .

Ⓜ. Déterminez le rapport entre l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle AOB .

On sait que la longueur du rayon du cercle dans lequel est inscrit le triangle ABC vaut 8 .

Ⓣ. Déterminez la valeur de R .



Quatrième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3}$, la fonction dérivée de la fonction $f(x)$. a est un paramètre positif.

Les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ sont définies sur le même intervalle.

Exprimez vos réponses aux articles 8-9 en fonction de a , si cela est nécessaire.

8. Déterminez le domaine de définition de la fonction dérivée $f'(x)$.
9. Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.

On sait que la fonction $f(x)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

9. Déterminez une fonction $f(x)$ vérifiant ces conditions.

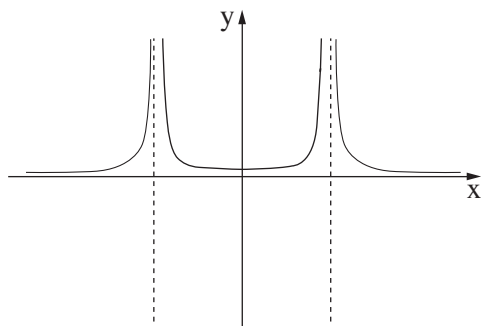
Soit la fonction $g(x) = \frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ et la fonction $h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$.

Les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont définies sur le même intervalle.

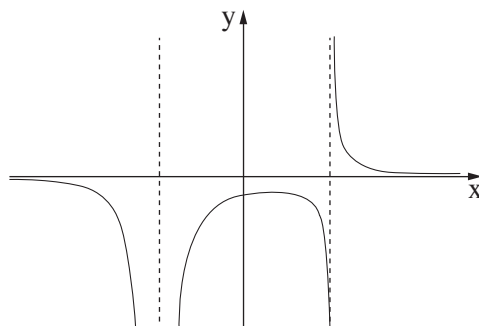
7. Faites correspondre à chacune des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ un graphe qui pourrait la représenter parmi les graphes I-IV figurant à la fin de l'exercice.
Justifiez vos réponses.

On sait que la fonction $h(x-6)$ admet une asymptote d'équation $x = 0,25a$.

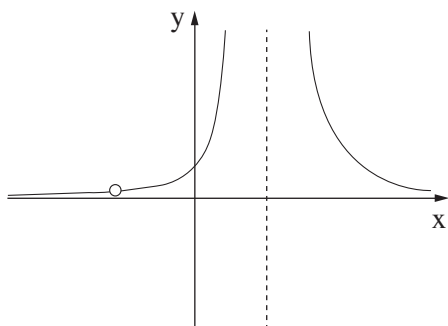
7. Déterminez la valeur de a .



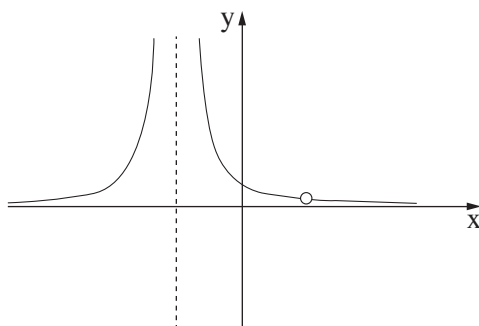
II



I



IV



III

7. Soit la fonction $f(x) = \cos x + \frac{2}{(\cos x)^2} + a$, sur l'intervalle $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
 a est un paramètre.

א. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

ב. La fonction $f(x)$ est-elle paire ou impaire ? Justifiez votre réponse.

On sait que le graphe de la fonction $f(x)$ est tangent à la droite $y = 2$ en deux points.

ג. Déterminez la valeur de a .

Substituez $a = 1$ puis répondez aux articles 7-ד.

ד. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

ה. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = f(x) - k$ et la fonction $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, toutes deux sur l'intervalle $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
 k est un paramètre, $k \neq 2$, $k \neq 4$.

ו. Déterminez la valeur de k pour laquelle le graphe de la fonction $g(x)$ et le graphe de la fonction $h(x)$ se croisent en chacun de leurs points d'extremum.

8. Soit la fonction $f(x) = x\sqrt{21-x}$.

א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

(2) Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive et ceux sur lesquels elle est négative.

On sait que la fonction $f(x)$ admet un seul point d'extremum local et qu'elle n'admet pas de point d'inflexion

ב. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Le point A se situe dans le premier quadrant sur le graphe de la fonction $f(x)$.

Le point C est le point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec la partie positive de l'axe des abscisses.

À partir du point A on abaisse deux perpendiculaires :

une perpendiculaire à l'axe des abscisses qui le coupe en un point B , et une autre perpendiculaire à la droite $x = 21$ qui la coupe en un point D .

ג. Déterminez les coordonnées du point A pour lequel le périmètre du rectangle $ABCD$ est maximal.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
 Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
 Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך