

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

а. Продолжительность экзамена: 4 часа 30 минут

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике четыре раздела, и в них восемь вопросов.

Раздел первый – короткие вопросы

Раздел второй – последовательности и теория вероятности

Раздел третий – геометрия и тригонометрия на плоскости

Раздел четвертый – дифференциальное и интегральное

исчисление полиномов, функций, содержащих корни,

рациональных функций и тригонометрических функций

Вы должны ответить на четыре вопроса, по меньшей мере на

один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере

на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и

четвертого.

$4 \times 25 = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе

с калькулятором, в котором есть возможности

программирования, запрещается использовать эти

возможности. Использование калькулятора с графическим

дисплеем или возможностей программирования может

привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае,

когда вычисления производились с помощью калькулятора).

Объясните все свои действия, включая вычисления,

подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно

подробная запись решения может привести к тому, что

оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет

аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, על שאלה אחת

לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה

אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי

והרביעי.

$100 = 25 \times 4$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או

לפסילת הבחינה.

Вопросы

Ответьте на четыре из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из первого или второго раздела и по меньшей мере на один вопрос из каждого из следующих разделов – третьего и четвертого (за каждый вопрос – 25 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на четыре вопроса, будут проверены только первые четыре ответа в вашей тетради.

Раздел первый – короткие вопросы

1. Ответьте на два из четырех пунктов (а)–(г), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на два пункта, будут проверены только первые два ответа в вашей тетради.

(а) (1) Докажите методом математической индукции или другим способом, что приведенное ниже равенство выполняется для любого натурального n :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(2) Равны ли выражение $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ и выражение $\frac{n+1}{n}$ для любого натурального n ? Обоснуйте свой ответ.

(б) Треугольник ABC вписан в окружность с центром O .

Обозначим: $\angle ACB = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(1) Выразите при помощи α отношение радиуса окружности, описанной вокруг треугольника ABC , к радиусу окружности, описанной вокруг треугольника AOB .

Дано, что отношение, которое вы выразили в подпункте (1), равно $\sqrt{2}$
и что сторона CB является касательной к окружности, описанной вокруг треугольника AOB .

(2) Докажите, что центр окружности O лежит на стороне AC .

- (ג) Дано, что функция $f(x)$ – нечетная и непрерывная функция, определенная для любого x .
 У функции $f(x)$ есть только одна точка минимума, в которой $x = -\frac{1}{2}$.

Одна из точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x – это точка $(1, 0)$.

- (1) Начертите возможный схематический график функции $f(x)$.

Дано, что функция $g(x)$ – четная функция, определенная для любого x .

Для производной $g'(x)$ выполняется $g'(x) = -f(x)$.

Дано: $g(1) = 2$.

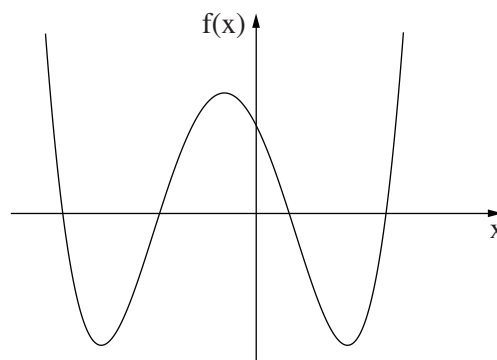
- (2) Найдите координаты точек минимума функции $g(x)$.
- (3) Ниже приведены два высказывания I–II. Определите для каждого высказывания, верно оно или неверно. Обоснуйте свои утверждения.
- I. Координата y точки максимума функции $g(x)$ находится между 0 и 2.
- II. Функция $g(x)$ положительна для любого x .

- (ד) На чертеже справа изображен график функции $f(x)$, определенной для любого x .
 Одно из выражений I–IV, приведенных ниже, представляет функцию $f(x)$.

- (1) Определите, какое из выражений представляет функцию $f(x)$.

Обоснуйте свои утверждения.

- I. $f(x) = x(x - 4)(x + 6)$
- II. $f(x) = x(x - 1)(x + 3)(x + 6)$
- III. $f(x) = (x - 4)(x - 1)(x + 3)(x + 6)$
- IV. $f(x) = (x - 4)(x + 1)(x + 3)(x + 6)$



Дана функция $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- (2) Найдите область определения функции $g(x)$.
- (3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Дано: $\int_4^7 g(x) dx = k$.

- (4) Выразите при помощи k значение $\int_5^8 [2 \cdot g(x - 1) + 1] dx$.

Раздел второй – последовательности и теория вероятности

2. Дана геометрическая прогрессия, в которой $2n + 1$ членов (n – натуральное число).

Все члены прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ являются положительными.

Сумма членов прогрессии без двух ее первых членов в 4 раза больше суммы членов прогрессии без двух ее последних членов.

Дано, что сумма членов, которые располагаются после среднего члена, в 256 раз больше суммы членов, которые располагаются перед средним членом.

(ж) Найдите n .

Данную прогрессию продолжили, так что образовалась бесконечная геометрическая прогрессия.

Дано: B – это бесконечная прогрессия, в которой для каждого натурального k выполняется

$$b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}.$$

(з) Докажите, что прогрессия B – геометрическая прогрессия, и найдите ее знаменатель.

В прогрессии B умножают на 2 каждый член прогрессии с четным номером.

Дано, что после умножения сумма членов прогрессии с нечетными номерами стала на $\frac{1}{30}$ больше суммы членов прогрессии с четными номерами.

(а) Найдите a_1 .

3. В исследовании, которое проводилось среди учащихся некоторой школы, проверили связь между участием в молодежном движении и волонтерством.

80% участников молодежного движения занимаются волонтерством.

Случайным образом выбирают 5 из учеников, которые участвуют в молодежном движении (выбор с возвращением).

(ж) Какова вероятность того, что выбрали по меньшей мере одного ученика, который занимается волонтерством, и по меньшей мере одного ученика, который не занимается волонтерством?

Дано, что 55% учеников не участвуют в молодежном движении и не занимаются волонтерством, а $\frac{1}{12}$ учеников, которые не участвуют в молодежном движении, занимаются волонтерством.

(з) Сколько процентов учеников участвуют в молодежном движении?

В исследовании приняло участие в общей сложности 100 учеников.

(а) Сколько учеников участвуют в молодежном движении, но не занимаются волонтерством?

(т) Случайным образом выбирают 3 из учеников, которые не занимаются волонтерством (выбор без возвращения).

(1) Какова вероятность того, что первый выбранный ученик участвует в молодежном движении, а два ученика, которые были выбраны после него, не участвуют в молодежном движении?

(2) Какова вероятность того, что один из выбранных учеников участвует в молодежном движении, а два других не участвуют в молодежном движении, если известно, что первый выбранный ученик не участвует в молодежном движении?

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O , так что AB – диаметр окружности.

Точка E лежит на стороне BC , а точка F лежит на отрезке BO , как показано на чертеже.

Дано, что четырехугольник $CEFO$ может быть вписан в окружность.

(*) Докажите: $EF = EB$.

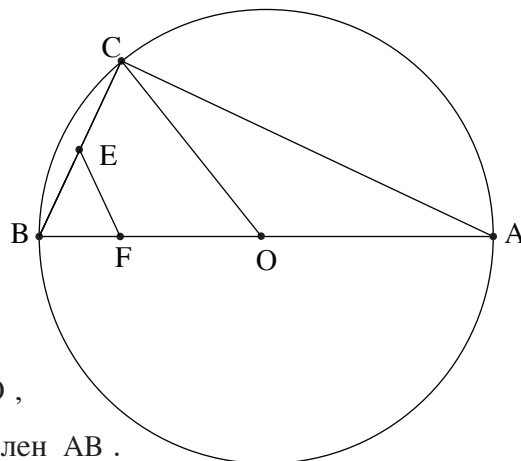
Окружность, которая описывает четырехугольник $CEFO$, пересекает сторону AC в точке D , так что ED параллелен AB .

(а) (1) Докажите, что четырехугольник $EDOB$ – это параллелограмм.

(2) Докажите: $OD \perp AC$.

Прямая ℓ – касательная в точке C к окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

(а) Докажите, что прямая ℓ является касательной к окружности, описанной вокруг четырехугольника $CEFO$.



5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом R .

Точка D – это середина малой дуги BC , как показано на чертеже.

Дано: $\angle ABC = 60^\circ$.

Обозначим: $\angle BAC = \alpha$.

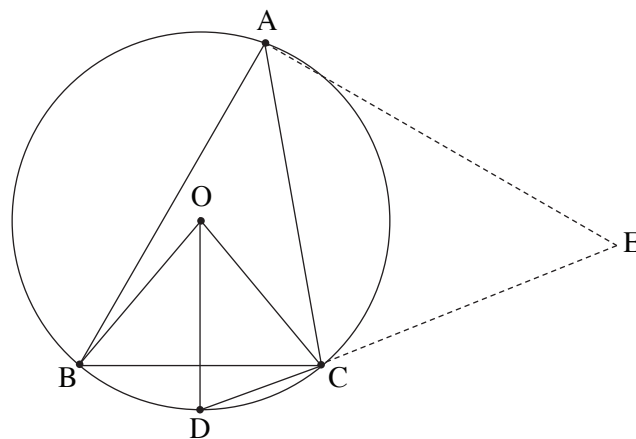
(*) Выразите при помощи R и α площади треугольников ABC и ODC .

Дано, что отношение площади треугольника ABC к площади треугольника ODC равно $2\sqrt{3} \sin(80^\circ)$.

(а) Найдите значение α .

Точка E – такая точка на продолжении хорды DC , что $\angle CAE = 50^\circ$, как показано на чертеже.

(а) Выразите при помощи R радиус окружности, вписанной в треугольник ACE .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция: $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, определенная в области $x \neq a$, a – параметр, не равный 0.

(а) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(2). При необходимости выразите свои ответы при помощи a .

(1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью y .

(б) Найдите, для каких значений a у функции $f(x)$ есть точка экстремума, которая находится слева от перпендикулярной к оси x асимптоты, и определите тип экстремума.

Графики 1–4 в конце вопроса описывают функцию $f(x)$ для различных значений a .

(в) Найдите график, соответствующий каждому из значений a (I–IV), и обоснуйте свой ответ.

I. $a = -1$

II. $a = 0.5$

III. $a = 1$

IV. $a = 2$

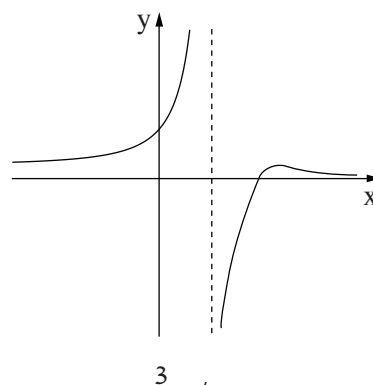
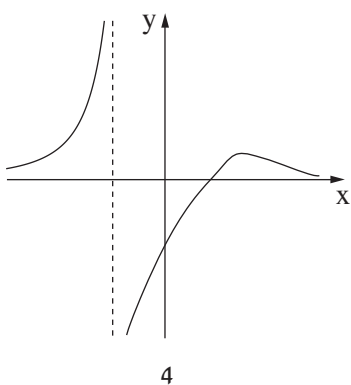
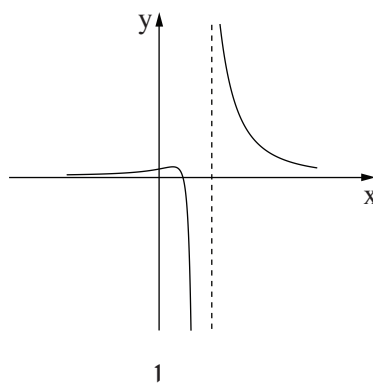
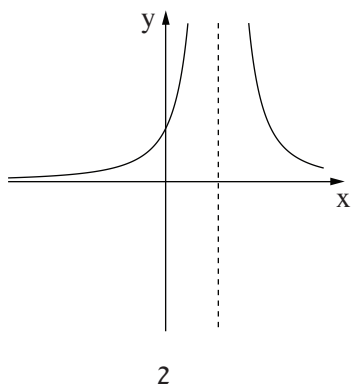
Дана функция $g(x)$, для которой выполняется $g(x) = f(x) - b$ для значения a , соответствующего графику 2.

b – положительный параметр.

Одна из точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x – это $(t, 0)$, $1 < t < 5$.

Дано, что площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$, горизонтальной асимптотой функции $g(x)$, прямой $x = t$ и прямой $x = 5$, равна 1.75.

(г) Найдите значение b .



7. Дана функция $f(x) = (b + \cos x) \sin x$, определенная в области $-\pi \leq x \leq \pi$, b – параметр.

(к) Функция $f(x)$ четная или нечетная? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что у графика функции $f(x)$ есть в точности три точки пересечения с осью x .

(а) Ниже приведены три возможных значения b , I–III.

Определите, какое из этих значений соответствует функции $f(x)$, и обоснуйте свой ответ.

I. $b = 0$ II. $0 < b < 1$ III. $1 \leq b$

Дано, что угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ при $\cos x = \frac{1}{4}$ равен $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

(а) Найдите значение b .

Подставьте $b = 1$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (т)–(и).

(т) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(и) (1) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(2) Начертите схематический график производной $f'(x)$.

Дана функция $g(x)$, для которой $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. Функция $g(x)$ определена в области $0 \leq x \leq \pi$.

(и) Вычислите площадь фигуры в первом квадранте, ограниченной графиком функции $g(x)$ и осью x .

8. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$, определенная в области $x \geq 0$, и дана функция $g(x) = \frac{16}{x^2 + 3}$, определенная для любого x .

(к) (1) Найдите координаты точки экстремума функции $g(x)$ и определите ее тип.

(2) Найдите координаты точек перегиба функции $g(x)$.

(3) Начертите в одной системе координат схематические графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

В точке $C(t, 0)$ проводят перпендикуляр к оси x , $t > 0$.

Этот перпендикуляр пересекает график функции $f(x)$ в точке A , а график функции $g(x)$ в точке B .

(а) Выразите при помощи t произведение длин отрезков AC и BC .

(а) Докажите, что произведение длин отрезков AC и BC является максимальным, когда точка B является точкой перегиба функции $g(x)$.

Дана функция $k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2 + 3}$, определенная в области $x \geq 4$.

(т) Воспользуйтесь предыдущими пунктами этого вопроса. Найдите координаты точки внутреннего экстремума функции $k(x)$ и определите ее тип. Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.