

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Résolvez les exercices en suivant ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude – premier questionnaire

Instructions

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. Durée de l'examen : quatre heures et quart.

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties avec en tout huit exercices.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez quatre exercices dont au moins un exercice de chaque partie – $4 \times 25 = 100$ points.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק

— $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas l'exercice, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Exercices

Résolvez quatre des exercices 1-8, dont au moins un exercice de chaque partie (25 points par exercice).

Attention : Si vous résolvez plus de quatre exercices, seules les quatre premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Nadav et Yossi sont sortis marcher à 8:00 le long du même parcours (voir figure).



Yossi a marché du début jusqu'à la fin du parcours à une vitesse constante et sans s'arrêter en route.

Nadav a marché 1,8 km depuis le début du parcours à une vitesse constante, puis il a décidé de revenir au début du parcours.

Sur le chemin du retour, Nadav a marché à une vitesse 1,5 fois supérieure à sa vitesse de marche initiale.

Lorsque Nadav est revenu au début du parcours, Yossi était à une distance de 4,8 km du début du parcours.

On note v km/h, la vitesse initiale de marche de Nadav.

⌘. Exprimez la vitesse de marche de Yossi en fonction de v .

À une distance de 3,5 km de la fin du parcours, il y a une piscine.

Après que Nadav est revenu au début du parcours, il s'est mis à nouveau à marcher le long du même parcours.

Il a marché à une vitesse de $(v + 2)$ km/h durant t heures jusqu'à ce qu'il soit arrivé à la piscine.

Lorsque Nadav est arrivé à la piscine, Yossi est arrivé à la fin du parcours.

⌘. Exprimez t en fonction de v .

Nadav est arrivé à la piscine à 15:30.

⌘. Déterminez v , sachant que v est supérieure à 1 km/h.

2. Soit une suite géométrique comportant $2n + 1$ termes (n est un nombre entier naturel).

Tous les termes de la suite $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ sont positifs.

La somme des termes de la suite sans les deux premiers termes est 4 fois supérieure à la somme des termes de la suite sans les deux derniers termes.

On sait que la somme des termes qui se trouvent après le terme du milieu est 256 fois supérieure à la somme des termes qui se trouvent avant le terme du milieu.

א. Déterminez n .

On a prolongé la suite donnée de sorte qu'une suite géométrique infinie s'est formée.

Donnée : B est une suite infinie vérifiant $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$ pour tout k entier naturel.

א. Prouvez que la suite B est une suite géométrique, puis déterminez sa raison.

Dans la suite B , on multiplie par 2 tous les termes qui se situent aux emplacements pairs.

On sait qu'après cette multiplication, la somme des termes qui se situent aux emplacements impairs est supérieure de $\frac{1}{30}$ à la somme des termes qui se trouvent aux emplacements pairs.

א. Déterminez a_1 .

3. Une étude effectuée auprès d'élèves d'une école donnée a examiné le lien entre le fait d'être membre d'un mouvement de jeunesse et le fait de faire du bénévolat au sein d'une communauté.

80 % des membres de mouvements de jeunesse font du bénévolat.

On choisit au hasard 5 élèves parmi ceux qui sont membres d'un mouvement de jeunesse (tirage avec remise).

א. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi au moins un élève qui fasse du bénévolat et au moins un élève qui ne fasse pas de bénévolat ?

On sait que 55 % des élèves ne sont pas membres d'un mouvement de jeunesse et ne font pas de bénévolat et que $\frac{1}{12}$ des élèves qui ne sont pas membres d'un mouvement de jeunesse font du bénévolat.

א. Quel est le pourcentage d'élèves qui sont membres d'un mouvement de jeunesse ?

100 élèves en tout ont participé à cette étude.

א. Parmi ces élèves, combien sont membres d'un mouvement de jeunesse et ne font pas de bénévolat ?

ב. Parmi les élèves qui ne font pas de bénévolat, on en choisit 3 au hasard (tirage sans remise).

(1) Quelle est la probabilité que le premier élève qui ait été choisi soit membre d'un mouvement de jeunesse et que les deux élèves qui aient été choisis après lui ne soient pas membres d'un mouvement de jeunesse ?

(2) Quelle est la probabilité que l'un des élèves qui ait été choisi soit membre d'un mouvement de jeunesse et que les deux autres ne soient pas membres d'un mouvement de jeunesse si l'on sait que le premier élève choisi n'est pas membre d'un mouvement de jeunesse ?

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O , de sorte que AB est un diamètre du cercle. Le point E se situe sur le côté BC , et le point F se situe sur le segment BO , tel que cela est représenté sur la figure.

On sait que le quadrilatère $CEFO$ peut être inscrit dans un cercle.

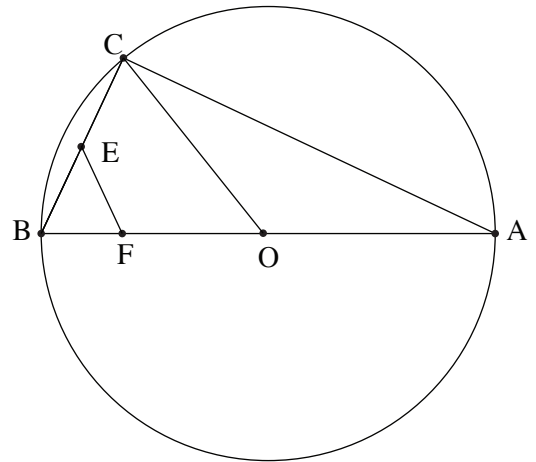
⌘. Démontrez que $EF = EB$.

Le cercle dans lequel le quadrilatère $CEFO$ est inscrit, coupe le côté AC en un point D , de sorte que ED est parallèle à AB .

- ⌘. (1) Démontrez que le quadrilatère $EDOB$ est un parallélogramme.
(2) Démontrez que $OD \perp AC$.

La droite ℓ est une tangente en un point C , au cercle dans lequel le triangle ABC est inscrit.

- ⌘. Démontrez que la droite ℓ est tangente au cercle dans lequel le quadrilatère $CEFO$ est inscrit.



5. Le triangle acutangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R . Le point D est le milieu de l'arc mineur BC , comme représenté sur la figure.

Donnée : $\angle ABC = 60^\circ$.

On note : $\angle BAC = \alpha$.

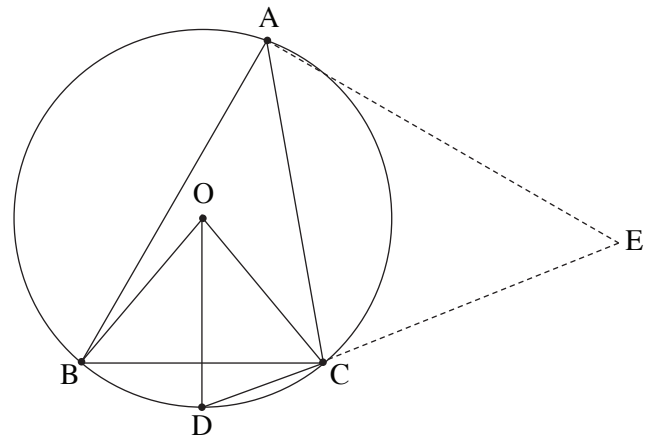
- ⌘. Exprimez en fonction de R et de α , les aires des triangles ABC et ODC .

On sait que le rapport entre l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle ODC est de $2\sqrt{3} \sin(80^\circ)$.

- ⌘. Déterminez la valeur de α .

Le point E se situe sur le prolongement de la corde DC , de sorte que $\angle CAE = 50^\circ$, comme représenté sur la figure.

- ⌘. Exprimez en fonction de R , le rayon du cercle qui est inscrit dans le triangle ACE .



Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, définie sur l'intervalle $x \neq a$, a est un paramètre différent de 0.
- א. Répondez aux sous-articles (1)-(2). Exprimez vos réponses en fonction de a si cela est nécessaire.
- (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (2) Déterminez les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des ordonnées.
- ב. Déterminez pour quelles valeurs de a la fonction $f(x)$ admet un point d'extremum qui se situe à gauche de l'asymptote qui est perpendiculaire à l'axe des abscisses, puis déterminez son type.

Les graphes 1-4 figurant à la fin de la question représente la fonction $f(x)$ pour différentes valeurs de a .

- ג. Faites correspondre à chacune des valeurs I-IV de a le graphe qui lui convient, puis justifiez vos réponses.

I. $a = -1$

II. $a = 0.5$

III. $a = 1$

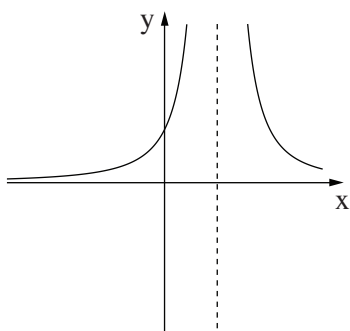
IV. $a = 2$

Soit la fonction $g(x)$, qui vérifie $g(x) = f(x) - b$ pour la valeur de a qui correspond au graphe 2. b est un paramètre positif.

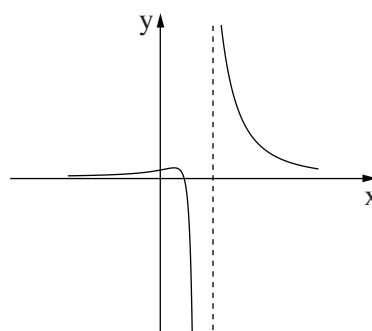
L'un des points d'intersection du graphe de la fonction $g(x)$ avec l'axe des abscisses est $(t, 0)$, $1 < t < 5$.

On sait que l'aire délimitée par le graphe la fonction $g(x)$, par l'asymptote horizontale de la fonction $g(x)$, par la droite $x = t$ et par la droite $x = 5$ vaut 1,75.

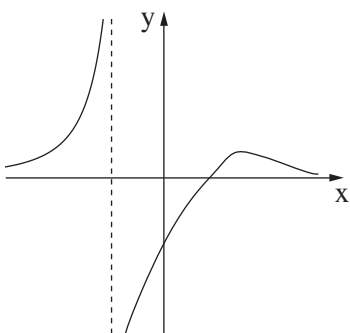
- ד. Déterminez la valeur de b .



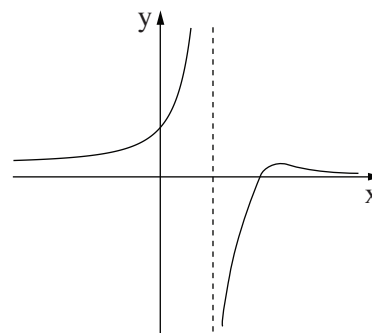
2



1



4



3

7. Soit la fonction $f(x) = (b + \cos x) \sin x$, définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$, b est un paramètre.
- א. La fonction $f(x)$ est-elle paire ou impaire ? Justifiez votre réponse.

On sait que le graphe de la fonction $f(x)$ admet exactement trois points d'intersection avec l'axe des abscisses.

- א. Voici trois valeurs possibles de b , I-III.

Déterminez laquelle des possibilités peut correspondre à la fonction $f(x)$, puis justifiez votre réponse.

- I. $b = 0$ II. $0 < b < 1$ III. $1 \leq b$

On sait que le coefficient directeur de la tangente au graphe de la fonction $f(x)$, lorsque $\cos x = \frac{1}{4}$, est $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

- א. Déterminez la valeur de b .

Substituez $b = 1$ dans la fonction $f(x)$, puis répondez aux questions 7-7.

7. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- ה. (1) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
- (2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$.

Soit la fonction $g(x)$ vérifiant $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. La fonction $g(x)$ est définie sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$.

- א. Calculez l'aire située dans le premier quadrant, qui est délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses.

8. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur l'intervalle $x \geq 0$, et soit la fonction $g(x) = \frac{16}{x^2 + 3}$, définie pour tout x .

- א. (1) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $g(x)$, puis déterminez son type.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'inflexion de la fonction $g(x)$.
- (3) Tracez dans un même repère une esquisse du graphe de chacune des fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

On trace une perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point $C(t, 0)$, $t > 0$.

Cette perpendiculaire coupe le graphe de la fonction $f(x)$ en un point A et le graphe de la fonction $g(x)$ en un point B .

- א. Exprimez en fonction de t , le produit des longueurs des segments AC et BC .
- א. Démontrez que le produit des longueurs des segments AC et BC est maximal lorsque le point B est un point d'inflexion de la fonction $g(x)$.

Soit la fonction $k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2 + 3}$, définie sur l'intervalle $x \geq 4$.

7. Aidez-vous des précédents articles de la question. Déterminez les coordonnées du point d'extremum local de la fonction $k(x)$, puis déterminez son type. Justifiez votre réponse.

Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך