

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Résolvez les exercices en suivant ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : quatre heures et quart.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées en tout de huit exercices.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Résolvez quatre exercices, au moins un exercice de chaque partie
— $4 \times 25 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.

L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas l'exercice, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque exercice sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק
— $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיטה" בראש כל עמוד המשמש טיטה.

כתבת טיטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Exercices

Répondez à quatre des exercices 1-8, au moins un exercice de chaque partie (25 points par exercice).

Attention : Si vous répondez à plus de quatre exercices, seules les quatre premiers exercices de votre copie seront corrigés.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. La maison d'Ouri et la maison de Dani se situent entre la piscine et l'épicerie, tel que cela est décrit sur le schéma ci-dessous.

La distance entre l'épicerie et la piscine est de 12,5 km. La distance entre la maison d'Ouri et la maison de Dani est de 2,3 km.



Chaque jour, Ouri a roulé à vélo à une vitesse de v km/h, et Dani a roulé à une vitesse supérieure de 6 km/h à la vitesse d'Ouri.

Dimanche et lundi, Ouri a roulé de sa maison à la piscine, et Dani a roulé de sa maison à l'épicerie.

Chacun de ces deux jours, ils sont partis à la même heure.

Dimanche, lorsque Dani est arrivé à l'épicerie, Ouri était à une distance de 4,8 km de la piscine.

Lundi, lorsque Dani est arrivé à l'épicerie, il s'y est arrêté et a effectué des achats durant 24 minutes.

À l'instant exact où Dani a fini ses achats, Ouri est arrivé à la piscine.

- ⌘. (1) Déterminez la vitesse à laquelle Ouri a roulé.
(2) Déterminez la distance entre la maison de Dani et l'épicerie.

Mardi, Dani a roulé de sa maison à l'épicerie, y a fait des achats durant une demi heure, puis il est reparti en direction de sa maison. Ce jour-là, Ouri également a roulé en direction de l'épicerie.

45 minutes après que Dani est sorti de sa maison, Ouri est sorti de l'épicerie et a roulé en direction de sa maison.

- ⌘. Sur leur trajet de retour en direction de leur maison, se sont-ils rencontrés sur le chemin entre l'épicerie et la maison d'Ouri ? Justifiez votre réponse.

2. La suite A est une suite géométrique dont les termes sont $a_1, a_2, a_3 \dots$ et sa raison est q , $-1 < q < 0$.

Donnée : $a_1 = 1$.

La suite B est définie pour tout n entier naturel de la manière suivante : $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

⌘. Démontrez que la suite B est une suite géométrique, puis exprimez sa raison en fonction de q .

Ⓜ. Voici trois affirmations I-III. Déterminez pour chacune de ces affirmations si elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses.

I. La suite A n'est ni croissante ni décroissante.

II. La suite B est une suite croissante.

III. Les termes qui se situent aux emplacements paires de la suite A forment une suite croissante.

Donnée : la suite B est une suite infinie dont la somme est $\frac{1}{8}$.

Ⓜ. Déterminez la valeur de q .

Soit une suite géométrique C , définie pour tout n entier naturel de la manière suivante : $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Données : $c_3 + c_4 + \dots + c_m = 44\,307$, m est un nombre entier naturel.

Ⓜ. Déterminez la valeur de m .

3. Un quiz comporte 5 questions. La probabilité de répondre correctement à chacune des questions est P .

On sait que la probabilité qu'un candidat au quiz réponde correctement à 4 questions au maximum est de 0,83193.

⌘. Déterminez P .

Ⓜ. Déterminez la probabilité qu'un candidat au quiz réponde correctement à précisément 3 questions.

Le nombre de points attribués à un candidat pour chaque question est identique au numéro de la question.

Cela signifie qu'un candidat qui répond correctement à la question numéro 1 reçoit un point.

Un candidat qui répond correctement à la question numéro 2 reçoit deux points, et ainsi de suite.

Ⓜ. Déterminez la probabilité qu'un candidat cumule au moins 14 points.

Ⓜ. Déterminez la probabilité qu'un candidat au quiz cumule précisément 6 points.

Ⓜ. On sait qu'Ah'inoam a répondu correctement à précisément 3 questions. Déterminez la probabilité qu'elle ait cumulé précisément 6 points.

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Le quadrilatère ABCD est inscrit dans un cercle.

Les diagonales du quadrilatère se coupent en un point F.

La tangente au cercle au point C coupe le prolongement de la corde AB en un point E (voir figure).

Donnée : $AB = CB$.

⌘. Démontrez que $\angle EBC = 2 \cdot \angle BDC$.

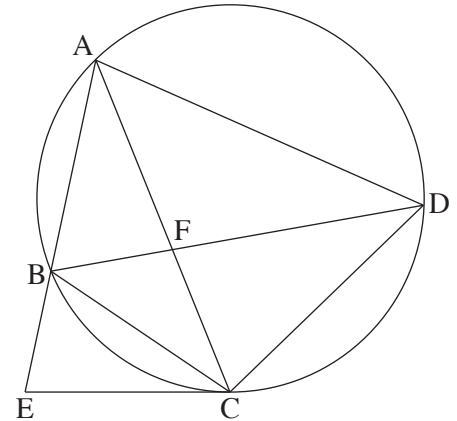
Données : AC est la bissectrice de l'angle ECD.

$$\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$$

- ⌘. (1) Démontrez que $AC = AD$.
 (2) Déterminez le rapport $\frac{AD}{CD}$.
 (3) Déterminez le rapport entre l'aire du triangle ABF et l'aire du triangle CBF.

On note S l'aire du triangle ABF.

⌘. Exprimez l'aire du triangle AEC en fonction de S.



5. Dans le triangle ABC, BD est la médiane du côté AC. Le point E se situe sur le côté BC.

BD et AE se coupent en un point P (voir figure).

Donnée : $BP = 3 \cdot PD$.

On note : $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.

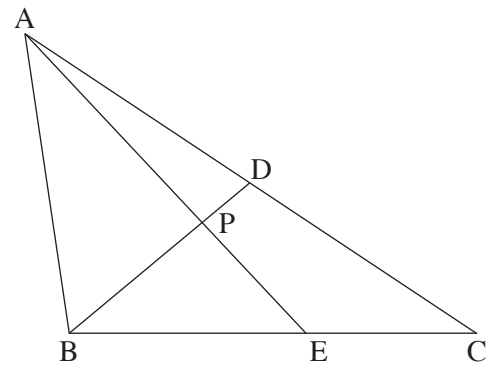
⌘. Exprimez les longueurs des segments BP et AP en fonction de α , β et k.

On sait que AE et BD sont perpendiculaires,

et que l'aire du triangle ABD vaut $\frac{1}{4}k^2$.

- ⌘. Déterminez la mesure de l'angle α .
 ⌘. Déterminez le rapport entre le rayon du cercle dans lequel le triangle AEC est inscrit et le rayon du cercle dans lequel le triangle AEB est inscrit.
 7. Déterminez la longueur du rayon du cercle dans lequel le triangle AEC est inscrit de sorte que $\angle ABC = 90^\circ$ est vérifié.

Exprimez votre réponse en fonction de k.



Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{4x}{(x^2 - a)^2}$, a est un paramètre positif.

Répondez aux articles 8-11. Exprimez vos réponses en fonction de a si cela est nécessaire.

8. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.
9. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

$g(x)$ est une fonction qui vérifie $g'(x) = f(x)$. Le graphe de la fonction $g(x)$ passe par le point $(0, 0)$. Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont définies sur le même intervalle.

10. Déterminez les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas de la fonction $g(x)$.
11. (1) Déterminez une fonction $g(x)$ vérifiant ces conditions.
- (2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$ que vous avez déterminée au sous-article 11(1).

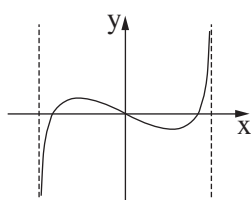
$h(x)$ est une fonction définie ainsi : $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Les fonctions $h(x)$ et $f(x)$ sont définies sur le même intervalle.

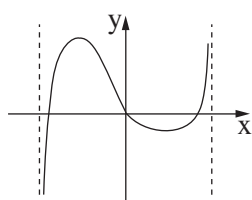
12. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $h(x)$ qui sont parallèles aux axes.
- (2) Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $h(x)$ est positive.

7. Soit la fonction $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos x}$ définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.

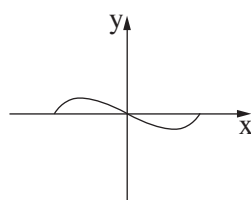
- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Montrez que la fonction $f(x)$ est paire.
- (3) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.
- (4) Déterminez les coordonnées de tous les points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type (dans votre réponse, donnez 2 chiffres après la virgule).
- ב. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
- ג. Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive et les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est négative (s'il en existe).
- ד. Parmi les graphes I-IV ci-dessous, déterminez lequel représente la fonction dérivée $f'(x)$.



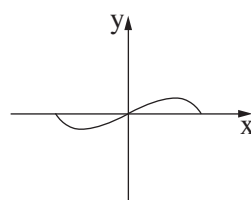
IV



III



II



I

Soit la fonction $g(x) = k - f(x)$, k est un paramètre positif. Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont définies sur le même intervalle.

On note S l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et par l'axe des abscisses sur l'intervalle entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On sait que l'aire délimitée par les graphes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et par les droites $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ vaut $10 \cdot S$.

ה. Exprimez k en fonction de S .

8. Le segment AB est un diamètre d'un cercle de rayon R .

On marque un point C sur ce diamètre et un point D sur le cercle, de sorte que le segment CD est perpendiculaire au segment AB .

Le segment AC est plus grand que R .

On trace une droite parallèle au diamètre AB passant par le point D .

On trace une tangente au cercle passant par le point A .

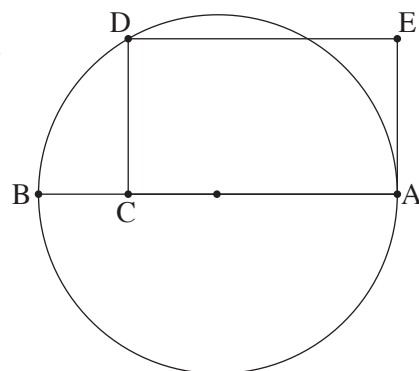
La droite parallèle et la tangente se coupent en un point E .

On note : $AC = x$.

א. Exprimez en fonction de R la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $ACDE$ est maximale.

Le point F se trouve sur le côté DE .

ב. Exprimez en fonction de R la somme maximale des aires des triangles CDF et AFE .



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך