

Mathématiques

5 unités d'étude – premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions dont au moins à une question de chaque partie – $5 \times 20 = 100$ points.

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק

— $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Questions

Répondez à cinq des questions 1-8, au moins une question de chaque partie (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Le point A se situe au nord du point O et le point B se situe au sud du point O .

Le point C se situe à l'est du point O , à une distance de 15 km de celui-ci, comme représenté sur le schéma.

Dimanche, Ouri a marché du point O vers le point A .

Au même moment, Smadar a couru du point C vers le point O .

La vitesse de course de Smadar est trois fois plus grande que la vitesse de marche d'Ouri.

On sait qu'à l'instant où Ouri a atteint le point A , la distance à vol d'oiseau entre lui et Smadar était de $\sqrt{145}$ km.

Les vitesses d'Ouri et de Smadar sont constantes.

- א. Déterminez la distance parcourue par Ouri et celle parcourue par Smadar dimanche, si l'on sait que Smadar a dépassé le point O durant sa course.

Le même jour, Boaz a commencé à marcher du point O vers le point B . Boaz a commencé à marcher 20 minutes après qu'Ouri a commencé à marcher. La vitesse de marche de Boaz était constante et supérieure de 50 % à la vitesse de marche d'Ouri.

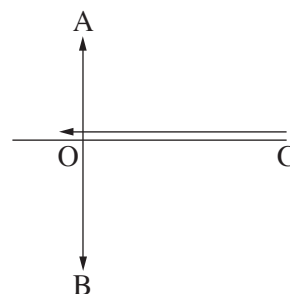
Lorsqu'Ouri a atteint le point A , la distance qui le séparait de Boaz était de 18 km, et à cet instant précis ils se sont arrêtés tous les deux.

- ב. Déterminez la vitesse de marche d'Ouri et la vitesse de marche de Boaz.

Lundi, Ouri et Boaz ont commencé à marcher en même temps. Chacun d'eux est parti du point où il s'était arrêté dimanche, et a continué à marcher dans la direction dans laquelle il marchait dimanche. Boaz a réduit sa vitesse de marche de v km/h tandis qu'Ouri a augmenté sa vitesse de marche de v km/h.

Les deux se sont arrêtés lorsque la distance qui les séparait était de 24 km.

- ג. Déterminez combien de minutes Ouri a marché lundi.



2. Soit une suite arithmétique $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$ comportant $3n$ termes, et dont la raison est d .

On note S_n^* la somme des n termes centraux de cette suite.

א. Démontrez que $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

On sait que le premier terme de la suite est positif et que la somme des n termes centraux vaut 0.

- א. La raison de la suite est-elle positive ou négative ? Justifiez votre réponse.

On sait que $a_1 = 19 \cdot |d|$.

- א. Déterminez le nombre de termes que comporte la suite.

On supprime plusieurs des termes de la suite donnée, créant ainsi une nouvelle suite arithmétique :

$$a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}.$$

La somme des termes de cette nouvelle suite vaut 36.

- א. Déterminez d .

3. Un journal quotidien qui est distribué aux abonnés qui résident à Haïfa ou à Tel Aviv uniquement, doit être envoyé à leur domicile chaque jour avant 6:00.

Le service clientèle du journal a mené un sondage auprès de ses abonnés en leur demandant, concernant un jour précis, s'ils avaient reçu le journal à temps.

Tous les abonnés ont participé à ce sondage, et chacun d'eux a répondu oui ou non.

Les résultats du sondage montrent que la probabilité de choisir au hasard un abonné qui a reçu le journal à temps parmi les abonnés qui résident à Haïfa est de $\frac{3}{4}$ et que la probabilité de choisir au hasard un abonné qui réside à Haïfa parmi les abonnés qui ont reçu le journal à temps est de $\frac{5}{9}$.

On note p la probabilité qu'un abonné choisi au hasard parmi tous les abonnés réside à Haïfa.

On choisit au hasard l'un des abonnés.

- א. Exprimez en fonction de p , la probabilité que l'abonné choisi réside à Tel Aviv et ait reçu son journal à temps.

On sait que le nombre d'abonnés qui résident à Tel Aviv et qui n'ont pas reçu leur journal à temps, est 1,5 fois plus grand que le nombre d'abonnés qui résident à Tel Aviv et qui ont reçu leur journal à temps.

- א. Quel est le pourcentage des abonnés qui ont reçu leur journal à temps ?

Parmi les abonnés qui n'ont pas reçu leur journal à temps, on choisit au hasard deux abonnés.

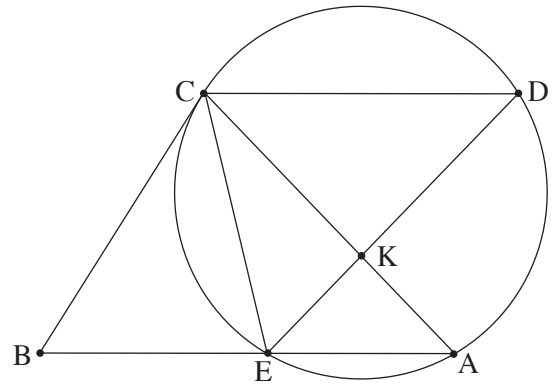
- א. Quelle est la probabilité que le premier abonné choisi réside à Tel Aviv et que le deuxième réside à Haïfa ?

Le même jour, 6 abonnés qui n'avaient pas reçu leur journal à temps ont appelé le service clientèle du journal.

- א. Quelle est la probabilité qu'au maximum 4 d'entre eux résident à Haïfa ?

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. À partir d'un point B , qui se situe en dehors d'un cercle, on a tracé une droite tangente à ce cercle en un point C , ainsi qu'une autre droite qui coupe le cercle aux points E et A , comme représenté sur la figure. Le point D est situé sur le cercle de sorte que la corde CD est parallèle à la corde EA . Les cordes ED et AC se coupent en un point K .
- א. Démontrez que $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.



Données : $AK = 3$, $ED = 7$.

On note S l'aire du triangle CEK .

- א. Exprimez l'aire du triangle CKD en fonction de S .

Donnée : $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.

- א. Exprimez l'aire du triangle CEB en fonction de S .

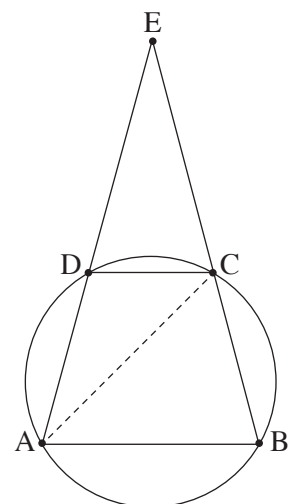
Le point O est le centre du cercle.

- ב. Démontrez que $\angle COE = \angle CKE$.

Donnée : $\angle CAE = 45^\circ$.

- ג. Expliquez pourquoi les points O , C , E et K sont situés sur un même cercle.

5. Soit un trapèze $ABCD$ ($AB \parallel DC$), inscrit dans un cercle. Les prolongements des côtés AD et BC se croisent en un point E , comme représenté sur la figure.
- Donnée : $\angle ACB = 60^\circ$.
- On note : $AC = k$, $\angle CDE = \alpha$.
- א. (1) Déterminez les angles du triangle ACE (exprimez vos réponses en fonction de α si nécessaire).
- (2) Exprimez les longueurs des côtés AB et DC en fonction de α et de k .



On sait que l'aire du triangle ABE est 3 fois plus grande que l'aire du triangle DCE .

- א. Déterminez la mesure de l'angle α .
- א. Déterminez la valeur de k pour laquelle la longueur de la médiane relative au côté EC dans le triangle AEC vaut $\sqrt{7}$.

Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x - 4)^2}$, $0 < a < 4$ est un paramètre.

⌘. Répondez aux sous-articles (1)-(5). Exprimez vos réponses en fonction de a si nécessaire.

- (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.
- (4) Déterminez l'abscisse du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.
- (5) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{x^2}{(x - 4)^2}$, définie sur le même intervalle que la fonction $f(x)$.

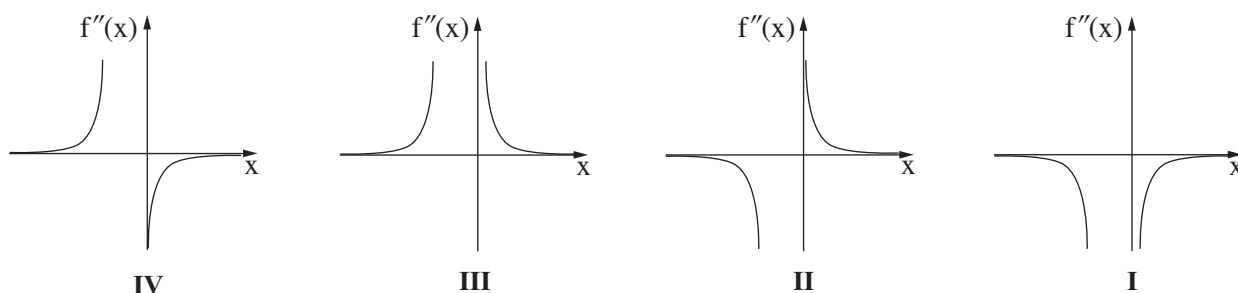
- ⌘. (1) Démontrez que le graphe de la fonction $g(x)$ se trouve entièrement au-dessus du graphe de la fonction $f(x)$.
- (2) Exprimez en fonction de a , l'aire délimitée par les graphes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, par la droite $x = 1$ et par l'axe des ordonnées.

7. Soit la fonction $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}}$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Le graphe de la fonction $f(x)$ coupe-t-il les axes ? Justifiez votre réponse.
- (3) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (4) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.

On sait que la fonction $f(x)$ n'admet pas de point d'inflexion.

- א. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
- ב. En vous aidant du graphe de la fonction $f(x)$, déterminez lequel des graphes I-IV qui se trouvent à la fin de la question, représente le graphe de la dérivée seconde $f''(x)$. Justifiez votre réponse.
- ג. Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction dérivée seconde $f''(x)$, par l'axe des abscisses ainsi que par les droites $x = 1$ et $x = 2$.



8. Le point E est le milieu du segment AB.

Sur le segment AB, on construit un rectangle ABCD ainsi qu'un triangle rectangle AFB, $\angle AFB = 90^\circ$, comme représenté sur la figure.

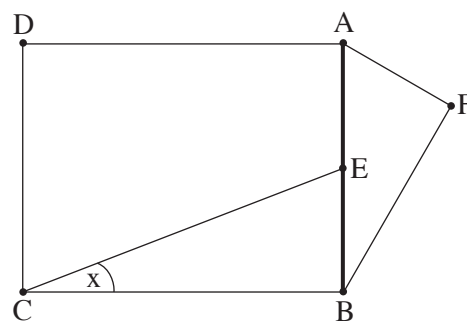
Données : $\angle ECB = x$, $\angle FAB = 2x$.

On note h la longueur du segment AB.

א. Quel est l'intervalle des valeurs possibles de x ?

Expliquez votre réponse.

- ב. Exprimez en fonction de x et h , la différence entre la longueur du segment CE et la longueur du segment AF.
- ג. Déterminez la valeur de x pour laquelle la différence entre la longueur du segment CE et la longueur du segment AF est minimale.
- ד. Pour la valeur de x que vous avez déterminée à l'article ג, déterminez le rapport entre l'aire du rectangle ABCD et l'aire du triangle AFB.



Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך