

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions dont au moins à une question de chaque partie – $5 \times 20 = 100$ points.

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות שאלה אחת מכל פרק

— $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Répondez à cinq des questions 1-8 dont au moins à une question de chaque partie (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Deux cyclistes, un cycliste α et un cycliste β , sont partis respectivement de deux lieux, A et B et ont roulé l'un vers l'autre.

La distance séparant les lieux A et B est $3d$ km (d est un paramètre positif).

Le cycliste β est parti 2,5 heures après que le cycliste α est parti.

À 15:30, chacun des cyclistes avait parcouru un tiers de la distance entre A et B.

La vitesse de chacun des cyclistes était constante.

Le lendemain, les cyclistes sont de nouveau partis des mêmes lieux, A et B, et ont roulé l'un vers l'autre.

Chacun des cyclistes a roulé à une vitesse identique à celle du premier jour. Cette fois-ci, ils sont partis en même temps et se sont rencontrés au bout de 9 heures.

- α . (1) À quelle heure le cycliste α est-il parti du lieu A le premier jour ?
(2) Exprimez la vitesse de chacun des cyclistes en fonction de d .

Le temps qu'il faut au cycliste α pour parcourir un kilomètre est supérieur de 1,25 minute au temps qu'il faut au cycliste β pour parcourir un kilomètre.

- β . Déterminez la distance entre A et B.

2. Soit deux suites géométriques infinies et convergentes, A et B , dont tous les termes sont différents de 0.

Le terme général de la suite A est a_n et sa raison est q_A .

Le terme général de la suite B est b_n et sa raison est q_B .

À partir des deux suites géométriques A et B , on construit une nouvelle suite géométrique infinie et convergente dont les termes sont :

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

Les trois suites : la suite A , la suite B et la nouvelle suite ne sont pas constantes.

⌘. Exprimez la raison de la nouvelle suite en fonction de q_A et q_B .

La suite A n'est ni croissante ni décroissante, et la suite B est croissante.

- Ⓐ. Concernant chacune des affirmations (1) - (2) suivantes, déterminez si elle est vraie ou fausse, puis justifiez votre réponse.

(1) La raison de la nouvelle suite est positive.

(2) Tous les termes de la suite B sont négatifs.

Les nombres c_1 , c_2 et c_3 sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique.

On sait que c_2 est égal à $-c_1$, et également que $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$.

- Ⓐ. Déterminez c_1 .

On sait que la raison de la suite A est égale à c_1 ,

et également que $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$.

- Ⓙ. Déterminez la valeur de q_B .

3. Dans une grande école d'enseignement supérieur, on a proposé de réduire la pause déjeuner afin de terminer la journée de cours plus tôt. Suite à cela, on a effectué un vote auquel ont participé tous les étudiants de première et de deuxième année.

D'après les résultats de ce vote, 80% des participants qui sont pour cette proposition sont des élèves de première année. De plus, il s'avère que le nombre d'étudiants de première année qui sont pour cette proposition est égal au nombre d'étudiants de deuxième année qui sont contre la proposition. Parmi les participants au vote personne ne s'est abstenu.

On note p la probabilité de choisir au hasard un étudiant qui est pour la proposition, parmi tous les participants qui ont participé au vote.

- ⌘. On a choisi au hasard un des étudiants de deuxième année. Quelle est la probabilité qu'il soit contre la proposition ?

On sait que la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard parmi les étudiants de première année soit pour la proposition est supérieure de $\frac{13}{35}$ à la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard parmi les étudiants de deuxième année soit pour la proposition.

- Ⓐ. Calculez la valeur de p .

- Ⓐ. On a choisi au hasard un des participants au vote. Calculez la probabilité qu'au moins l'une des conditions suivantes soit réalisée : I. Le participant choisi est un étudiant de deuxième année. II. Le participant choisi est pour la proposition.

- Ⓙ. On a choisi au hasard 5 des participants au vote.

On sait que les cinq sont des étudiants de deuxième année.

Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient pour la proposition et

qu'également au moins deux d'entre eux soient contre la proposition ?

/suite en page 4/

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Les points A , B et C se trouvent sur un cercle.

Le point E est le milieu de l'arc de cercle BC , comme représenté sur la figure ci-contre.

On trace une tangente au cercle passant par le point E .

La tangente coupe le prolongement de la corde AB en un point G .

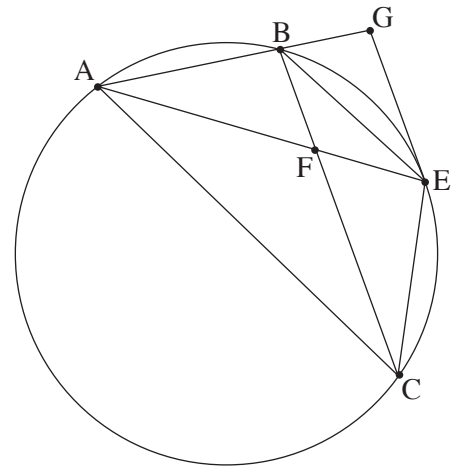
Les cordes AE et BC se coupent en un point F .

- א. Démontrez que $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.

Données : $AG = 6$, $AE = 3\sqrt{6}$.

- ב. Calculez la longueur de la corde AC .

- ג. Démontrez que $BC \parallel GE$.



Donnée : L'aire du triangle ABF est 2 fois supérieure à l'aire du triangle BFE .

- ד. Calculez la longueur de la corde AB .

- ה. Quel est le rapport entre l'aire du triangle ABF et l'aire du triangle AFC ? Justifiez votre réponse.

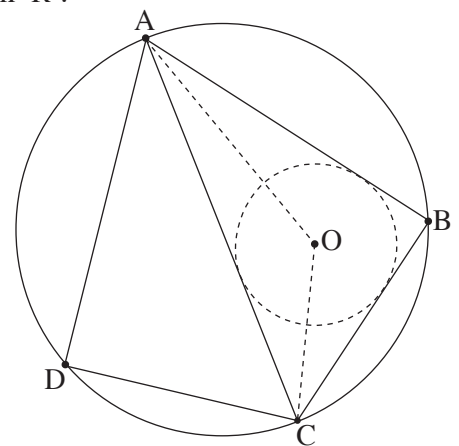
5. Un "cerf-volant" $[ABCD]$ est inscrit dans un cercle de rayon R .

La corde AC est la diagonale principale du cerf-volant.

Le point O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (voir figure).

On note : $\angle CAB = \alpha$.

- א. (1) Déterminez les mesures des angles du triangle AOC (exprimez-les en fonction de α si nécessaire).
(2) Exprimez la longueur du segment AO en fonction de α et de R .



Donnée : la longueur du segment AO est $R\sqrt{2}$.

- ב. Calculez la mesure de l'angle α .

Donnée : l'aire du cerf-volant vaut $25\sqrt{3}$.

- ג. Déterminez R .
ד. Calculez la distance entre le centre du cercle dans lequel le cerf-volant est inscrit et le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .

Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$ définie pour $x \neq 0$. a est un paramètre positif.
- א. Exprimez vos réponses en fonction de a si cela est nécessaire.
- (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes, s'il en existe.
 - (2) Montrez que la fonction $f(x)$ est une fonction impaire.
 - (3) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes, s'il en existe.
 - (4) Déterminez les intervalles de croissance et les intervalles de décroissance de la fonction $f(x)$, s'il en existe.
 - (5) Déterminez l'intervalle de concavité vers le haut ($\cup$) et l'intervalle de concavité vers le bas ($\cap$) de la fonction $f(x)$.
- א. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit également la fonction $g(x) = |f(x)| - b$, b est un paramètre positif.

La fonction $g(x)$ est définie sur le même intervalle que la fonction $f(x)$.

- א. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

On sait que l'un des points d'extremum de la fonction $g(x)$ est : $(2, -3)$.

- א. Déterminez les valeurs de a et de b .

Soit également la fonction $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, définie sur l'intervalle $1 < x$.

- א. De quel type est le point d'extremum de $s(x)$? Justifiez votre réponse.

7. Soit la fonction $f(x)$, définie sur l'intervalle $x \leq a$, $x \neq 0$. a est un paramètre positif.

Le graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ est représenté sur la figure ci-contre.

La fonction dérivée $f'(x)$ est définie sur l'intervalle $x \neq 0$, $x < a$.

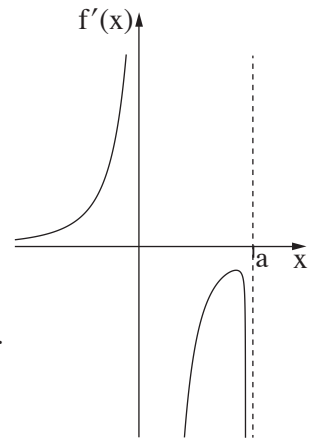
La fonction dérivée $f'(x)$ admet trois asymptotes qui sont perpendiculaires aux axes et dont les équations sont :

$$y = 0, \quad x = a, \quad x = 0.$$

Sur l'intervalle $x < 0$, la fonction dérivée $f'(x)$ est croissante.

La droite $x = 0$ est une asymptote également du graphe de la fonction $f(x)$.

$$f(a) = 0.$$



⌘. (1) Déterminez l'intervalle de croissance et l'intervalle de décroissance de la fonction $f(x)$ (exprimez votre réponse en fonction de a , si cela est nécessaire). Justifiez.

(2) Combien de points d'inflexion la fonction $f(x)$ admet-elle ? Justifiez.

Donnée : la droite $y = 0$ est une asymptote du graphe de la fonction $f(x)$.

Ⓐ. Tracez une esquisse possible du graphe de la fonction $f(x)$, correspondant à votre réponse au sous-article ⌘(2).

On sait que l'une des expressions I-IV ci-dessous représente la fonction $f(x)$.

$$\text{I. } \frac{\sqrt{a-x}}{x^2} \quad \text{II. } \frac{\sqrt{x-a}}{x^2} \quad \text{III. } \frac{\sqrt{a-x}}{x} \quad \text{IV. } \frac{\sqrt{x-a}}{x}$$

Ⓐ. Laquelle des expressions I-IV ci-dessus représente la fonction $f(x)$? Justifiez.

On sait que le coefficient directeur de la tangente au graphe de la fonction $f(x)$ au point où

$$x = (-2), \text{ est } \frac{7}{16}.$$

Ⓙ. Déterminez la valeur de a .

Ⓚ. Substituez $a = 2$, puis calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $(f(x))^2$, par l'axe des abscisses et par la droite $x = 1$.

8. Soit un losange ABCD. Le point E est le milieu du côté BC.

On note $\angle ECD = x$.

Donnée : l'aire du triangle ECD vaut 18.

⌘. Exprimez la longueur du côté du losange en fonction de x .

Ⓐ. Calculez la longueur minimale du segment DE.

Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך