

Mathématiques

5 unités d'étude – deuxième questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : deux heures et quart.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte deux parties constituées de cinq questions.

Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.

Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.

Répondez à trois questions au choix, une question au moins de

chaque partie – $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (joint au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide d'une calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement.

Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם,

לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי

הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à trois des questions 1-5, une question au moins de chaque partie ($33\frac{1}{3}$ points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de trois questions, seules les trois premières réponses de votre cahier seront corrigées.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes

1. Soit une ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b est un paramètre positif.

On sait que les foyers de l'ellipse se trouvent sur l'axe des abscisses.

On note D_1 et D_2 les points d'intersection de l'ellipse avec l'axe des ordonnées, et on note F_1 le foyer gauche de l'ellipse et F_2 le foyer droit de l'ellipse.

On sait que le quadrilatère $F_1D_1F_2D_2$ est un carré.

⌘. (1) Déterminez la valeur de b .

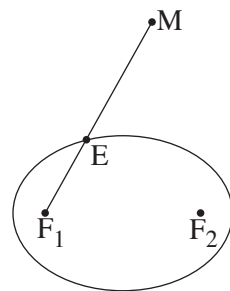
(2) Calculez l'aire du carré $F_1D_1F_2D_2$.

Dans l'équation de l'ellipse, substituez $b^2 = 4,5$, puis répondez aux articles 3-7.

Le point E est un point quelconque sur l'ellipse.

On relie par une ligne droite le foyer gauche F_1 et le point E , puis on prolonge cette ligne droite jusqu'au point M (voire figure), de sorte que $EM = EF_2$.

- ⌘. Démontrez que le lieu géométrique de tous les points M est un cercle, puis notez son équation.



On déplace le cercle que vous avez déterminé à l'article 3 de $\frac{3}{\sqrt{2}}$ unités vers la droite, obtenant ainsi un autre cercle.

On multiplie par $\frac{2}{3}$ l'ordonnée de chacun des points situés sur cet autre cercle, obtenant ainsi une nouvelle courbe.

- ⌘. Identifiez la forme de cette nouvelle courbe, puis déterminez son équation.

Soit un triangle dont deux des sommets sont les points d'intersection de la nouvelle courbe avec l'axe des abscisses, et dont le sommet restant se situe également sur la nouvelle courbe.

7. Déterminez la plus grande aire possible de ce triangle. Justifiez votre réponse.

2. Soit deux plans, π_1 et π_2 :

$$\pi_1: (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$$

$$\pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

k est un paramètre.

⌘. Expliquez pourquoi ces deux plans se coupent nécessairement l'un l'autre.

On sait que la droite ℓ_1 d'intersection entre les deux plans est parallèle à

la droite $\ell_2: \underline{x} = (1, 2, -1) + m(-1, k, k)$.

⌘. (1) Déterminez la valeur de k .

(2) Déterminez une représentation paramétrique de la droite ℓ_1 .

(3) Déterminez l'angle formé par les plans π_1 et π_2 .

Le point P se trouve sur la droite ℓ_1 et sur le plan $[yz]$.

Les points A et B sont respectivement les points d'intersection de l'axe des ordonnées avec les plans π_1 et π_2 .

⌘. (1) Déterminez les coordonnées des points P , A et B .

(2) Déterminez l'aire du triangle APB .

3. Soit l'équation I : $w^6 = -27$, w est un nombre complexe.

⌘. Résolvez l'équation I.

Soit l'équation II : $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, z est un nombre complexe.

⌘. (1) En vous aidant des solutions de l'équation I, donnez une représentation algébrique des solutions de l'équation II.

(2) Expliquez pourquoi les points du plan de Gauss représentant les solutions de l'équation II se situent sur un cercle, puis déterminez son équation.

(3) Démontrez que toutes les solutions de l'équation II sont représentées par les sommets d'un hexagone régulier dans le plan de Gauss.

Donnée : les deux solutions imaginaires et les deux solutions réelles de l'équation II sont représentées par les sommets d'un quadrilatère dans le plan de Gauss.

⌘. (1) De quel type est le quadrilatère ainsi obtenu ? Justifiez votre réponse.

(2) Déterminez le rapport entre l'aire de l'hexagone et l'aire du quadrilatère.

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissances, fonctions exponentielles et logarithmiques

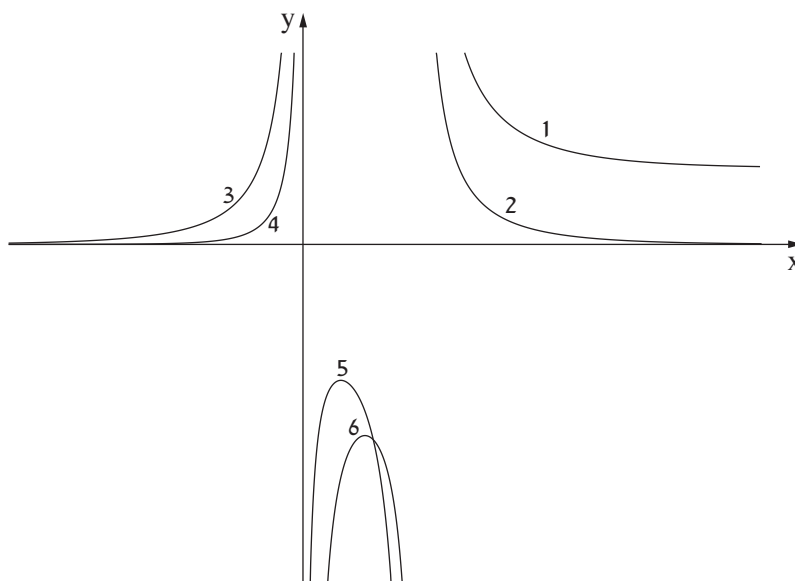
4. Soit la fonction $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 5e^x + 4}$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4}$ définie sur le même intervalle que la fonction $f(x)$.

- א. Déterminez les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec le graphe de la fonction $g(x)$.

Voici une figure des graphes des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Chacune des parties de ces graphes est désignée par un numéro différent sur la figure.



- א. Indiquez à quelle fonction appartient chacune des parties numérotées sur la figure. Justifiez votre réponse.
- א. Voici deux expressions, I-II. Pour chacune de ces expressions, déterminez si elle est négative ou positive. Justifiez sans calcul.

I. $\int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$

II. $\int_{\ln \frac{8}{5}}^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx$

- א. Calculez l'aire délimitée par les graphes des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ainsi que par les droites $x = \ln 9$ et $x = \ln 16$.

5. Soit la fonction $f(x) = 4x(\ln(x^2) - 1)$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.
- (3) Démontrez que la fonction $f(x)$ est impaire.
- ב. (1) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- (2) La fonction $f(x)$ admet-elle des points d'inflexion ? Justifiez votre réponse.
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- ג. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $g(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.
- (4) En combien de points les graphes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se coupent-ils ? Justifiez votre réponse.
- ד. Donnez un exemple de fonction primitive de la fonction $g(x)$.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך