

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie dans le plan

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions au choix — $5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointés au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתך — $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
- (2) שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (3) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à cinq des questions 1-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Trois stations sont situées le long de la rive d'un fleuve : la station A , la station B et la station C qui se trouve en un point situé entre la station A et la station B .

Le fleuve coule de la station A vers la station B à une vitesse constante.

Deux barques, la barque I et la barque II , sont parties à 8:00 du point C et ont vogué dans des directions opposées :

la barque I a vogué (à contre-courant) vers la station A et la barque II a vogué (dans le sens du courant) vers la station B .

Immédiatement après que chacune des barques a atteint la station prévue, elle a fait demi-tour et a vogué dans le sens inverse.

On sait que la vitesse en eau stagnante de chacune des barques est constante.

La vitesse de la barque I lorsqu'elle a vogué dans le sens du courant était 1,5 fois plus élevée que sa vitesse lorsqu'elle a vogué à contre-courant.

La vitesse de la barque II lorsqu'elle a vogué dans le sens du courant est 4 fois plus grande que la vitesse de la **barque I** lorsqu'elle a vogué à contre-courant.

On note x la vitesse du courant dans le fleuve.

- ⌘. Exprimez en fonction de x , la vitesse de la barque I en eau stagnante ainsi que la vitesse de la barque II en eau stagnante.

La barque I a atteint la station A 3 heures après son départ puis a immédiatement fait demi-tour et a vogué en direction de la station B .

La barque II a atteint la station B 7 heures après son départ puis a immédiatement fait demi-tour et a vogué en direction de la station A .

- ⌘. (1) À quelle heure les deux barques se sont-elles croisées ?
(2) Les barques se sont-elles croisées entre la station A et la station C ou bien entre la station B et la station C ? Justifiez votre réponse.

Les barques se sont croisées à une distance de 84 km de la station C .

- ⌘. Quelle est la vitesse du courant dans le fleuve ?

2. Soit une suite géométrique infinie A dont le terme général est a_n et la raison est q .

On construit une nouvelle suite B dont le terme général est $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. Démontrez que la suite B est également géométrique.

- א. Concernant chacune des affirmations (1)-(2) ci-dessous, déterminez si elle est vraie ou fausse, puis justifiez votre réponse.

(1) Si la suite A n'est pas convergente, la suite B elle aussi est nécessairement non convergente.

(2) Si la suite A est décroissante, elle est aussi nécessairement convergente.

On sait que les deux suites sont convergentes, et que le rapport entre la somme de tous les termes de la suite B et la somme de tous les termes de la suite A vaut $\frac{3}{5}$.

א. Déterminez q .

Données : n est un nombre entier naturel vérifiant $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$.

א. Déterminez n .

3. Dans un magasin de fruits se trouvent des cageots contenant des fruits.

Le cageot א contient a fruits : 3 pommes et le reste sont des poires.

Le cageot ב contient b fruits : 5 pommes et le reste sont des poires.

On sort au hasard un fruit du cageot א. Si une pomme a été sortie, on la transfère dans le cageot ב, et si une poire a été sortie, on la remet dans le cageot א.

Ensuite on sort un fruit au hasard du cageot ב.

א. Exprimez en fonction de a et b la probabilité que l'on ait sorti 2 pommes.

Données : la probabilité de sortir de la manière décrite 2 pommes est de $\frac{9}{65}$.

La probabilité de sortir de la manière décrite une pomme et ensuite une poire est de $\frac{21}{130}$.

א. Déterminez a et b .

- א. Calculez la probabilité qu'une poire ait été sortie du cageot ב, si l'on sait qu'une pomme a été sortie du cageot א.

On transfère tous les fruits des deux cageots dans un autre cageot qui était vide, puis on en sort un fruit au hasard 6 fois, avec remise.

א. Déterminez la probabilité qu'une pomme ait été sortie exactement 4 fois ou qu'une poire ait été sortie lors de chacune des 6 fois.

א. On sait qu'une pomme a été sortie exactement 4 fois. Déterminez la probabilité que ces pommes aient été sorties consécutivement (l'une après l'autre).

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Deux cercles se coupent en des points A et B (voir figure).

La corde AC du cercle de gauche coupe le cercle de droite en un point D.

La corde AE du cercle de droite coupe le cercle de gauche en un point F.

Le segment CE passe par le point B.

⌘. Démontrez que $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.

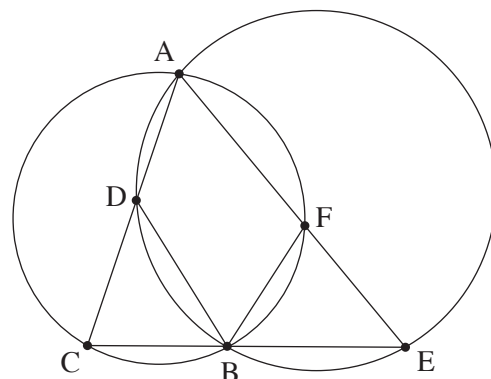
Donnée : $DC = FE$.

Ⓐ. Démontrez que $\triangle BFE \cong \triangle BCD$.

Ⓐ. (1) Démontrez que $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) Démontrez que AB est la bissectrice de CAE.

Ⓙ. Démontrez que $\angle DEC = \angle FCE$.



5. Le triangle BCD est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.

Les points O et E se situent sur le côté BD de sorte que $OE = ED$ (voir figure).

On note : $CD = m$, $\angle CDB = \alpha$.

⌘. Exprimez $\cos \alpha$ en fonction de m et de R.

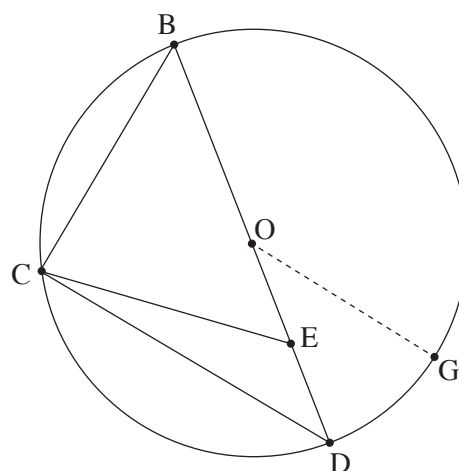
Ⓐ. Démontrez que $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + R^2}$.

Donnée : $BC = EC$.

Ⓐ. Calculez α .

On trace un rayon OG parallèle au côté CD, comme représenté sur la figure.

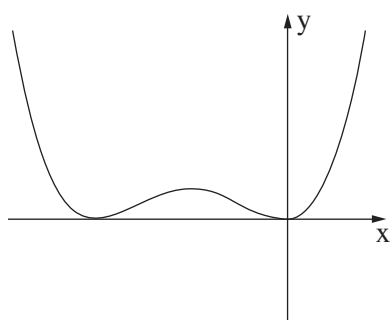
Ⓙ. Calculez la mesure de l'angle OEG.



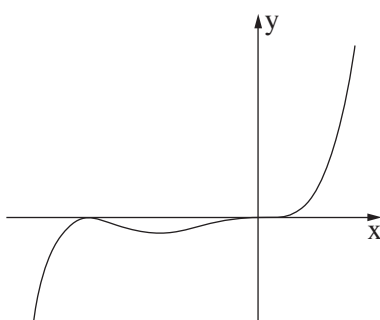
Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = x^n \cdot (x+1)^2$, $n > 1$ est un nombre entier naturel. La fonction $f(x)$ est définie pour tout x .
- Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.
 - Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive et les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est négative (s'il en existe). Distinguez entre n pair et n impair.
 - Déterminez les abscisses des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type. Exprimez vos réponses en fonction de n si nécessaire. Distinguez entre n pair et n impair.

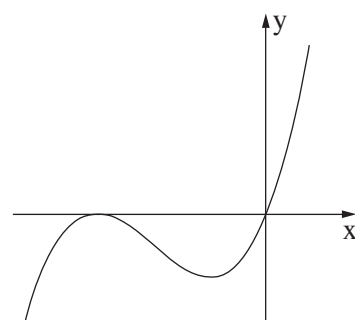
Voici trois graphes I-III. L'un de ces graphes représente la fonction $f(x)$ pour n pair, et un autre de ces graphes représente la fonction $f(x)$ pour $n > 1$ et impair.



III



II



I

7. Déterminez quel graphe représente la fonction $f(x)$ pour n pair, et quel graphe représente la fonction $f(x)$ pour $n > 1$ et impair. Justifiez vos réponses.

Soit la fonction $g(x) = a \cdot f(x-2)$, a est un paramètre positif.

On note T la surface délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses.

8. Exprimez en fonction de a et de T la surface délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et par l'axe des abscisses. Justifiez votre réponse.

7. Soit la fonction $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^2(x) - 1}$ définie sur l'intervalle $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires à l'axe des abscisses.
- (3) La fonction $f(x)$ est-elle paire, impaire ou ni paire ni impaire ? Justifiez votre réponse.
- ב. Répondez aux sous-articles (1)-(2) ci-dessous pour l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.
- (1) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes (s'il en existe).
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- ג. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$ (sur l'intervalle $-2\pi \leq x \leq 2\pi$).
- ד. Démontrez que la fonction $f(x)$ n'admet pas de point d'inflexion.
- ה. Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ et par l'axe des abscisses, sur l'intervalle $1,7 \leq x \leq 2$.

8. Voici trois fonctions et pour chacune d'elles il existe deux valeurs de x pour lesquelles la fonction n'est pas définie.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}.$$

On sait que l'une des fonctions admet une seule asymptote horizontale et une seule asymptote verticale.

- א. Parmi les trois fonctions données, déterminez laquelle vérifie toutes ces propriétés. Justifiez votre réponse.

Répondez aux articles ג-ד pour la fonction que vous avez déterminée à l'article א.

- ב. (1) Déterminez l'équation de l'asymptote horizontale et l'équation de l'asymptote verticale de cette fonction.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de cette fonction avec les axes.

On sait que cette fonction n'admet pas de point d'extremum.

- ג. Tracez une esquisse du graphe de la fonction.

On note un point A sur le graphe de la fonction, pour lequel $x = t$, $-1 < t < 1$.

À partir du point A , on trace deux droites, l'une perpendiculaire à l'axe des abscisses et l'autre perpendiculaire à l'asymptote verticale de la fonction, de sorte qu'un rectangle est formé par ces deux droites, par l'asymptote verticale et par l'axe des abscisses.

- ד. Déterminez la valeur de t pour laquelle le périmètre du rectangle obtenu est minimal.

Vous pourrez laisser une racine dans votre réponse.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך