

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה!

מטמטיקה

5 יחידות לימוד – второй вопросник

מטמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על

שאלה אחת מכל פרק –

$3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש

באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו

אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי

או באפשרויות התכנות במחשבון עלול

לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות,

כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה

ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום

לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Обратите внимание: объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Даны точки $A(-5, 3)$ и $B(0, -2)$.

(а) Найдите уравнение геометрического места центров окружностей, хордой которых является отрезок AB .

Окружность M является одной из окружностей, хорда которых – это отрезок AB .

Точки пересечения окружности M с осью x – это фокусы эллипса, уравнение которого каноническое.

(б) Найдите координаты центра окружности M и ее радиус.

Дано, что длина большой оси эллипса равна длине диаметра окружности M .

(в) Каково уравнение этого эллипса?

Обозначим через F правый фокус данного эллипса. Прямая, перпендикулярная оси x , проходит через левый фокус данного эллипса. Эта прямая пересекает данный эллипс в точках Q и T и окружность M – в точках K и L .

(г) Найдите отношение площади треугольника KLF к площади треугольника TQF .

2. Дана пирамида $OABC$, в основании которой лежит треугольник ABC .

Обозначим: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$.

Дано: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}|$

Для точки H выполняется $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. t , s и k – параметры.

Дано, что $\vec{OH}$ перпендикулярен основанию ABC пирамиды.

(а) Докажите, что $t = s = k$.

Точка M располагается на основании ABC пирамиды и является точкой пересечения медиан основания.

(б) Докажите, что $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$ и объясните, почему OM – высота к основанию ABC пирамиды.

Точка P располагается на прямой ℓ , на которой лежит высота к основанию ABC .

(в) Выразите при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ вектор $\vec{OP}$, для которого объем пирамиды $PABC$ в два раза больше, чем объем пирамиды $OABC$ (две возможности).

Пирамиду $OABC$ помещают в систему координат. Точка O располагается в начале координат, точка A располагается на положительной части оси x , точка B располагается на положительной части оси y , а точка C располагается на положительной части оси z .

Дано: $|\underline{u}| = a$.

(г) Найдите параметрическое уравнение прямой ℓ , на которой располагается отрезок OP .

(д) Выразите при помощи a уравнение плоскости ABC .

(е) Дано, что объем пирамиды $OABC$ равен $20\frac{5}{6}$. Вычислите a .

3. Число $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ находится в плоскости Гаусса в третьем квадранте.

Дано: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(א) Найдите α .

Дано: $|2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$.

(ב) Найдите R .

(ג) Дано уравнение: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z – число, которые вы нашли).

Покажите, что число $\frac{z}{\bar{z}}$ – одно из решений этого уравнения.

(ד) Треугольник ABC – равнобедренный треугольник. Вершины при основании B и C соответствуют числам: $\frac{z}{\bar{z}}$ и $\frac{\bar{z}}{z}$.

Вершина $[אחור השריף]$ A соответствует числу $z + k$, k – чисто мнимое число.

(1) Каково значение k ?

(2) Вычислите площадь четырехугольника $ABOC$ (O – точка начала координат).

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$, определенная для любого x , a – параметр.

(к) (1) Найдите область, в которой функция $f(x)$ положительна.

(2) Найдите координаты x точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

Дано, что площадь фигуры, заключенной между графиком функции производной $f'(x)$ и осью x равна $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

(б) Найдите значение a .

Подставьте $a = 1$ и ответьте на вопросы пунктов (г)–(н).

(г) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ является производной функции $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

(т) (1) Какова область возрастания функции $g(x)$? Обоснуйте свой ответ.

(2) Сколько точек перегиба есть у функции $g(x)$? Обоснуйте свой ответ.

Обозначим как B точку перегиба, в которой значение функции $g(x)$ самое большое из всех ее точек перегиба.

Дано, что значение y точки B равно $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

(н) Найдите функцию $g(x)$.

5. Дана функция $f(x)$, обладающая следующими свойствами: функция определена для любого x и является непрерывной и нечетной, прямая $y = 0$ – асимптота этой функции, и у функции есть единственная точка минимума, координаты которой $(-1, -a)$, a – положительный параметр.

(*) Начертите возможный схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $h(x) = \ln(f(x))$.

(б) (1) Найдите область определения функции $h(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $h(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

(3) Найдите область значений a , при которых график функции $h(x)$ пересекает ось x в двух точках.

(4) Начертите схематический график функции $h(x)$, если известно, что ее график пересекает ось x в двух точках.

Дано: $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ – это функция, для которой $g'(x) = f(x)$, а также $g(0) = 0$.

(а) (1) Найдите функцию $g(x)$.

(2) $g(x)$ – это четная функция, нечетная функция или не четная и не нечетная функция? Обоснуйте свой ответ.

Дан интеграл $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

(г) Каково значение t , при котором выполняется $2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx = \int_{-5}^5 g(x) dx$? Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.