

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה!

Математика
5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

הוראות

а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут.

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов. בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
Раздел первый – алгебра и теория вероятности פרק ראשון – אלגברה והסתברות
Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
Раздел третий – дифференциальное и интегральное פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
исчисление полиномов, функций, содержащих корни, של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
рациональных функций и тригонометрических функций יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם –
Вы должны ответить на пять вопросов по выбору – $20 \times 5 = 100$ баллов. נקודות.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש

באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

ד. הוראות מיוחדות:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או

לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

תתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Обратите внимание: объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.
Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на пять из вопросов 1–8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Четыре бегуна участвуют в эстафете на дистанции 1 440 метров. Дистанция делится на 4 равных участка. В начале каждого участка стоит один из бегунов.

Первый бегун начинает бежать, когда раздается выстрел из стартового пистолета. Немедленно после того, как он достигает конца первого участка, стартует второй бегун, и так далее до того, когда четвертый бегун добегают до конца своего участка.

Скорость второго бегуна в 1.5 раза больше скорости первого бегуна. Скорость третьего бегуна в 2 раза меньше скорости второго бегуна, а скорость четвертого бегуна равна скорости третьего бегуна. Скорость каждого из бегунов постоянна на всем протяжении его участка.

Вместе четыре бегуна преодолели всю дистанцию за три минуты 54 секунды.

(а) Найдите скорость, с которой бежал каждый из бегунов.

Третий и четвертый бегуны тренировались, чтобы увеличить свою скорость.

Через некоторое время эти четыре бегуна вновь приняли участие в эстафете на той же дистанции. Каждый из них бежал на том же участке дистанции, что и в прошлый раз. Общее время забега третьего и четвертого бегунов было в 1.5 раза больше, чем общее время забега первых двух бегунов. Первый бегун и второй бегун бежали с той же скоростью, с которой они бежали в прошлый раз.

Третий бегун пробежал каждые 100 метров за время, меньшее на 2.5 секунды, чем время четвертого бегуна.

- (б) (1) Найдите, на сколько секунд время забега третьего бегуна меньше, чем время забега четвертого бегуна.
- (2) Увеличил ли каждый из этих бегунов – третий и четвертый – скорость своего забега? Обоснуйте свой ответ.

2. Дана бесконечная геометрическая прогрессия A , общий член которой a_n и знаменатель которой q .

(א) Докажите, что для любого натурального n выполняется $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

Для $2k$ первых членов прогрессии A произведение двух средних членов равно $10\,935 \cdot a_1$.

Дано: $a_{2k-2} = 1\,215$.

(ב) Найдите q (два возможных варианта).

Дано: $a_1 = 5$.

(א) (1) Определите, является ли прогрессия A возрастающей прогрессией, убывающей прогрессией или не возрастающей и не убывающей прогрессией. Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите k .

Из прогрессии A строят бесконечную последовательность B таким образом:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$$

(ג) Докажите, что последовательность B является геометрической прогрессией.

В прогрессии B меняют знак каждого из членов, расположенных на нечетных местах, так что получается последовательность C : $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

(ה) Найдите сумму последовательности C .

3. В крупном израильском городе провели опрос об уровне владения английским языком среди жителей города.

В опросе приняли участие многие люди – пожилые и молодые.

В ходе опроса выяснилось, что число пожилых людей, владеющих английским языком, в 3 раза больше, чем число молодых людей, которые владеют им, а число пожилых людей, которые не владеют английским, в $2\frac{2}{3}$ раза больше, чем число пожилых людей, владеющих им.

Обозначим как p вероятность случайным образом выбрать владеющего английским молодого человека из общего числа участников опроса.

(א) Найдите вероятность случайным образом выбрать владеющего английским пожилого человека из общего числа пожилых участников опроса.

(ב) Случайным образом выбирают трех пожилых людей из числа пожилых людей, которые участвовали в опросе. Найдите вероятность того, что в точности два из них владеют английским.

(א) (1) Выразите при помощи p вероятность случайным образом выбрать молодого человека, не владеющего английским, из общего числа участников опроса.

(2) Покажите, что область возможных значений p – это $0 < p < \frac{1}{12}$.

Известно, что вероятность случайным образом выбрать пожилого человека из числа участников опроса, не владеющих английским, равна вероятности случайным образом выбрать молодого человека из числа участников опроса, не владеющих английским.

(ג) Найдите значение p .

(ה) Являются ли зависимыми события «владеть английским» и «быть пожилым человеком»? Обоснуйте свой ответ.

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. В прямоугольнике $ABCD$ точка E расположена на стороне AD .

Отрезок CE пересекает диагональ BD в точке F .

Четырехугольник $EABF$ может быть
 вписан в окружность.

(*) Докажите: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

Дано: $DE = EA$.

(*) Вычислите отношение $\frac{EF}{FC}$.

Обозначим через S площадь треугольника DEF .

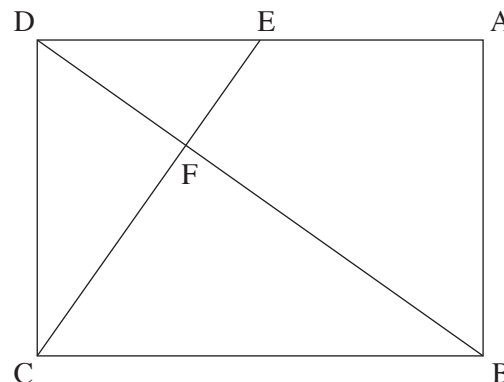
(*) Выразите при помощи S площади треугольников DFC и BFC .

(*) Вычислите отношение подобия между треугольником DAB и треугольником BFC .

Обозначим: $DE = a$.

(*) (1) Выразите длину диагонали BD при помощи a .

(2) Выразите диаметр окружности, описанной вокруг четырехугольника $EABF$,
 при помощи a .



5. Дана окружность с центром O и радиусом R .

Из точки A , лежащей за пределами окружности,
 провели прямую, касательную к окружности в точке D ,
 и другую прямую, которая пересекает окружность
 в точке B , как показано на чертеже.

Обозначим: $\angle AOD = \alpha$, $\angle AOB = \beta$.

(*) Выразите при помощи α , β и R
 (при необходимости):

(1) Длину отрезка AO .

(2) Длину отрезка AB .

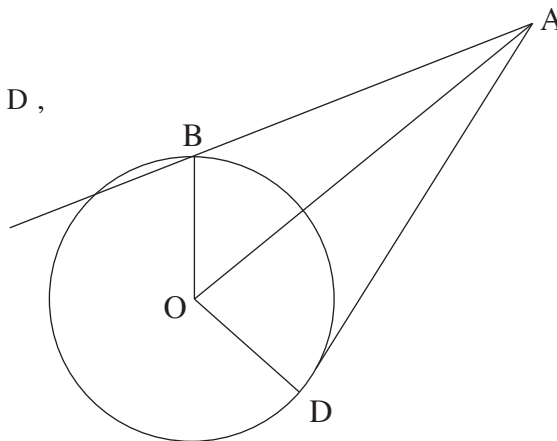
Дано: $AB = \sqrt{2} R$.

(*) Докажите, что $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

Треугольник ADO вписан в другую окружность, радиус которой r .

Дано: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

(*) Найдите величины углов α и β .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + a}}$, a – положительный параметр.

(⌘) Выразите при помощи a область определения функции $f(x)$.

Дано, что у функции $f(x)$ нет асимптот, перпендикулярных осям координат.

(⌘) (1) Найдите a .

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.

(3) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.

(4) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Даны функции: $g(x) = -f(x + 2)$, $h(x) = |f(x)|$.

(⌘) (1) Найдите область определения функции $g(x)$ и область определения функции $h(x)$.

(2) Координата y точки максимума функции $g(x)$ больше координаты y точки максимума функции $h(x)$, меньше ее или равна ей? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что $\int_{-1}^3 h(x) dx = \int_{-3}^k g(x) dx$, $k > -3$.

(⌘) Найдите k . Объясните свой ответ.

7. Дана функция $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, определенная для любого x .

(а) Является ли функция $f(x)$ четной? Обоснуйте свой ответ.

(б) Докажите, что для любого x выполняется: $-2 \leq f(x) \leq 0$.

(в) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат в области $-\pi \leq x \leq \pi$.

(г) Начертите схематический график функции $f(x)$ в области $-\pi \leq x \leq \pi$.

Дана функция $g(x) = f(2x)$, определенная для любого x .

(д) Найдите координаты точек экстремума функции $g(x)$ в области $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и определите их тип.

(е) Дано, что $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$.

Выразите $\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (g'(x) - f'(x)) dx$ при помощи S . Объясните свой ответ.

8. Дана функция: $f(x) = x^3 + 4x^2$, определенная для любого x .

Точка В расположена на графике функции $f(x)$ во втором квадранте (смотрите чертеж).

Из точки В проводят прямую, касательную к графику функции $f(x)$.

Данная касательная пересекает ось y в точке С.

Обозначим как t координату x точки В.

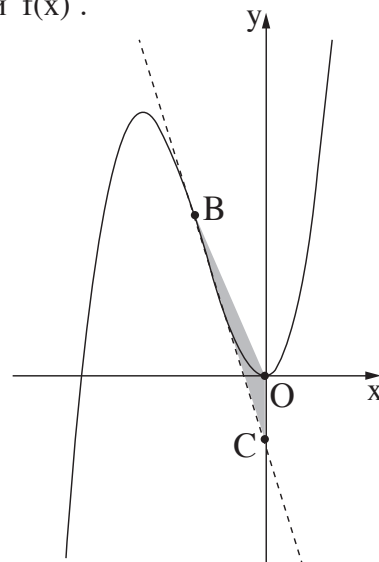
(а) Выразите при помощи t уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке В.

Известно, что точка С находится под осью x .

(б) Какова область значений t ?

Точка О – это точка начала координат.

(в) Найдите максимальную площадь треугольника ОВС.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.