

Государство Израиль
Министерство просвещения
Тип экзамена: на аттестат зрелости
Время проведения экзамена: лето 2022, срок "бет"
Номер вопросника: 035571
Приложение: листы с формулами
для уровня в 5 единиц обучения
Перевод на русский язык (5)

מדינת ישראל
משרד החינוך
סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשפ"ב, 2022, מועד ב
מספר השאלון: 035571
נספח: דפי נוסחאות
ל-5 יחידות לימוד
תרגום לרוסית (5)

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

תוכנית חדשה

Математика
5 единиц обучения – первый вопросник

מ ת מ ט י ק ה
5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

הוראות

- א. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. Строение вопросника и ключ к оценке: מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות. פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. Разрешенный вспомогательный материал: חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. Особые указания: הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל פעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.
כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.
Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

Вопросы

Обратите внимание: объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на пять из вопросов 1–8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – "Короткие вопросы", последовательности и теория вероятности

1. Ответьте на три из четырех пунктов (א)–(ד), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на три пункта, будут проверены только первые три ответа в вашей тетради.

(א) Докажите методом индукции или любым другим способом, что для любого натурального n выполняется:

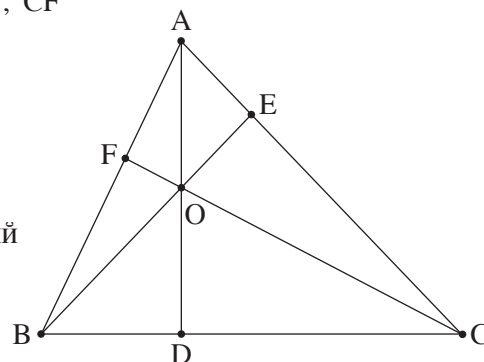
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

(ב) В остроугольном треугольнике ABC высоты AD , BE , CF пересекаются в точке O (смотрите чертеж).

Дано, что сумма расстояний точки O от вершин этого треугольника равна 20.

(1) Докажите, что можно вписать в окружность каждый из четырехугольников $AEOF$, $BDOF$, $CDOE$.

(2) Какова сумма длин окружностей, описанных вокруг четырехугольников $AEOF$, $BDOF$, $CDOE$?



(ג) Дана функция $f(x) = 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}}$.

(1) Какова область определения функции $f(x)$?

(2) Известно, что асимптоты графика функции $f(x)$, перпендикулярные осям координат, пересекаются между собой.

Вычислите площадь фигуры, заключенной между этими асимптотами. Обоснуйте свой ответ.

Обратите внимание: продолжение вопроса на следующей странице.

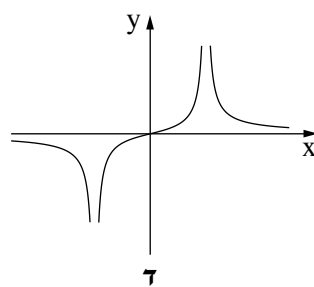
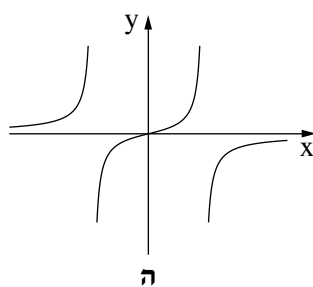
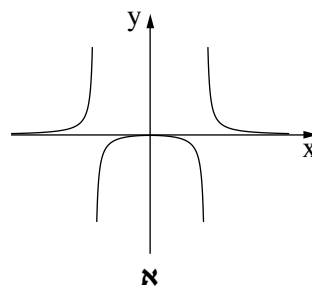
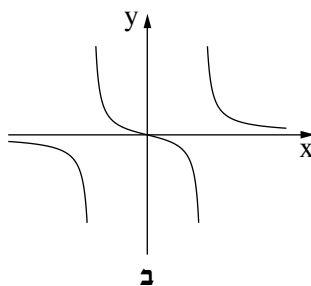
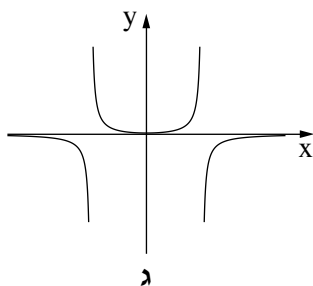
(7) Дана функция $f(x) = \frac{a \cdot x}{x^2 - 4}$, определенная для $x \neq 2$ и $x \neq -2$. $a \neq 0$ – параметр.

Один из графиков а–ה соответствует функции $f(x)$ для $a > 0$,

а один из них соответствует функции $f(x)$ для $a < 0$.

(1) Какой из этих графиков соответствует функции $f(x)$ для $a > 0$? Кратко обоснуйте свой ответ.

(2) Какой из этих графиков соответствует функции $f(x)$ для $a < 0$? Кратко обоснуйте свой ответ.



2. Дана бесконечная геометрическая прогрессия A , общий член которой a_n и знаменатель которой q .

(к) Докажите, что для любого натурального n выполняется $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

Для $2k$ первых членов прогрессии A произведение двух средних членов равно $10\,935 \cdot a_1$.

Дано: $a_{2k-2} = 1\,215$.

(а) Найдите q (два возможных варианта).

Дано: $a_1 = 5$.

(а) (1) Определите, является ли прогрессия A возрастающей прогрессией, убывающей прогрессией или не возрастающей и не убывающей прогрессией. Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите k .

Из прогрессии A строят бесконечную последовательность B таким образом:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$$

(т) Докажите, что последовательность B является геометрической прогрессией.

В прогрессии B меняют знак каждого из членов, расположенных на нечетных местах, так что

получается последовательность $C: -\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$

(н) Найдите сумму последовательности C .

3. В крупном израильском городе провели опрос об уровне владения английским языком среди жителей города.

В опросе приняли участие многие люди – пожилые и молодые.

В ходе опроса выяснилось, что число пожилых людей, владеющих английским языком, в 3 раза больше, чем число молодых людей, которые владеют им, а число пожилых людей, которые не владеют английским, в $2\frac{2}{3}$ раза больше, чем число пожилых людей, владеющих им.

Обозначим как p вероятность случайным образом выбрать владеющего английским молодого человека из общего числа участников опроса.

(к) Найдите вероятность случайным образом выбрать владеющего английским пожилого человека из общего числа пожилых участников опроса.

(а) Случайным образом выбирают трех пожилых людей из числа пожилых людей, которые участвовали в опросе. Найдите вероятность того, что в точности два из них владеют английским.

(а) (1) Выразите при помощи p вероятность случайным образом выбрать молодого человека, не владеющего английским, из общего числа участников опроса.

(2) Покажите, что область возможных значений p – это $0 < p < \frac{1}{12}$.

Известно, что вероятность случайным образом выбрать пожилого человека из числа участников опроса, не владеющих английским, равна вероятности случайным образом выбрать молодого человека из числа участников опроса, не владеющих английским.

(т) Найдите значение p .

(н) Являются ли зависимыми события «владеть английским» и «быть пожилым человеком»?

Обоснуйте свой ответ.

/продолжение на странице 5/

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. В прямоугольнике $ABCD$ точка E расположена на стороне AD .

Отрезок CE пересекает диагональ BD в точке F .

Четырехугольник $EABF$ может быть
 вписан в окружность.

(а) Докажите: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

Дано: $DE = EA$.

(б) Вычислите отношение $\frac{EF}{FC}$.

Обозначим через S площадь треугольника DEF .

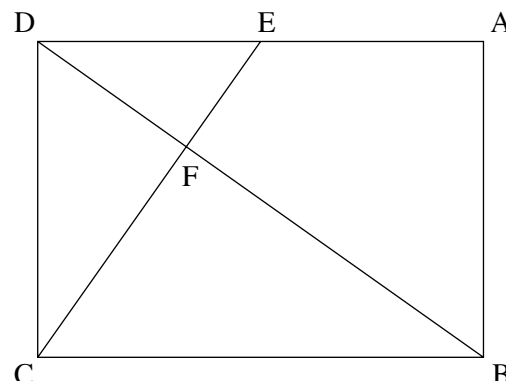
(в) Выразите при помощи S площади треугольников DFC и BFC .

(г) Вычислите отношение подобия между треугольником DAB и треугольником BFC .

Обозначим: $DE = a$.

(д) (1) Выразите длину диагонали BD при помощи a .

(2) Выразите диаметр окружности, описанной вокруг четырехугольника $EABF$,
 при помощи a .



5. Дана окружность с центром O и радиусом R .

Из точки A , лежащей за пределами окружности,
 провели прямую, касательную к окружности в точке D ,
 и другую прямую, которая пересекает окружность
 в точке B , как показано на чертеже.

Обозначим: $\angle AOD = \alpha$, $\angle AOB = \beta$.

(а) Выразите при помощи α , β и R
 (при необходимости):

(1) Длину отрезка AO .

(2) Длину отрезка AB .

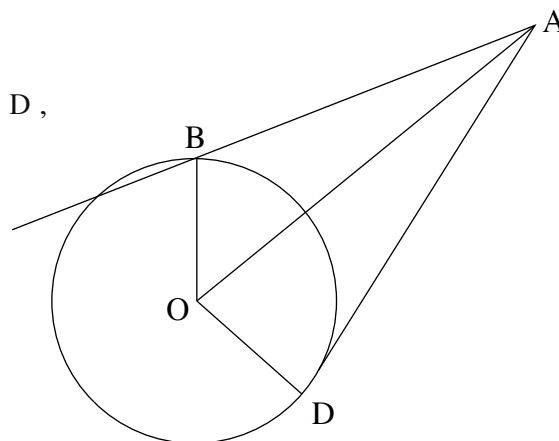
Дано: $AB = \sqrt{2} R$.

(б) Докажите, что $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

Треугольник ADO вписан в другую окружность, радиус которой r .

Дано: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

(в) Найдите величины углов α и β .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + a}}$, a – положительный параметр.

(⌘) Выразите при помощи a область определения функции $f(x)$.

Дано, что у функции $f(x)$ нет асимптот, перпендикулярных осям координат.

(⌘) (1) Найдите a .

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.

(3) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.

(4) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Даны функции: $g(x) = -f(x + 2)$, $h(x) = |f(x)|$.

(⌘) (1) Найдите область определения функции $g(x)$ и область определения функции $h(x)$.

(2) Координата y точки максимума функции $g(x)$ больше координаты y точки максимума функции $h(x)$, меньше ее или равна ей? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что $\int_{-1}^3 h(x) dx = \int_{-3}^k g(x) dx$, $k > -3$.

(⌘) Найдите k . Объясните свой ответ.

7. Дана функция $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, определенная для любого x .

(а) Является ли функция $f(x)$ четной? Обоснуйте свой ответ.

(б) Докажите, что для любого x выполняется: $-2 \leq f(x) \leq 0$.

(в) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат в области $-\pi \leq x \leq \pi$.

(г) Начертите схематический график функции $f(x)$ в области $-\pi \leq x \leq \pi$.

Дана функция $g(x) = f(2x)$, определенная для любого x .

(д) Найдите координаты точек экстремума функции $g(x)$ в области $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и определите их тип.

(е) Дано, что $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$.

Выразите $\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (g'(x) - f'(x)) dx$ при помощи S . Объясните свой ответ.

8. Дана функция: $f(x) = x^3 + 4x^2$, определенная для любого x .

Точка B расположена на графике функции $f(x)$ во втором квадранте (смотрите чертеж).

Из точки B проводят прямую, касательную к графику функции $f(x)$.

Данная касательная пересекает ось y в точке C .

Обозначим как t координату x точки B .

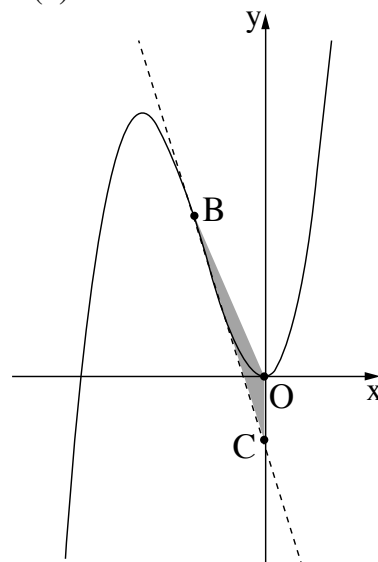
(а) Выразите при помощи t уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке B .

Известно, что точка C находится под осью x .

(б) Какова область значений t ?

Точка O – это точка начала координат.

(в) Найдите максимальную площадь треугольника OBC .



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.