

תוכנית חדשה

## Математика

## מתמטיקה

### 4 единицы обучения – второй вопросник

### 4 יחידות לימוד – שאלון שני

#### Указания

#### הוראות

а. Продолжительность экзамена: 1 час 45 минут.

א. משך הבחינה: שעה וארבעים וחמש דקות.

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.

בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

Раздел первый – геометрия в пространстве, статистика

פרק ראשון – גאומטריה במרחב, סטטיסטיקה

Раздел второй – рост и затухание, дифференциальное

פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי

и интегральное исчисление показательных и

ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

логарифмических функций

Вы должны ответить на три вопроса, по меньшей мере на

יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה

один вопрос из каждого раздела –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  баллов.

אחת מכל פרק –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש

באפשרויות התכנות במחשבון

שיש בו אפשרות תכנות. שימוש

במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי/לועזי-עברי.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

ד. הוראות מיוחדות:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.

1. אין להעתיק את השאלה;

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

יש לסמן את מספרה בלבד.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

случае, когда вычисления производились с помощью

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם

калькулятора). Объясните все свои действия, включая

כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות,

подробная запись решения может привести к тому, что

כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה

оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет

ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה

аннулирован.

בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован!

## Вопросы

**Обратите внимание:** объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

**Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.**

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос –  $33\frac{1}{3}$  балла).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – геометрия в пространстве, статистика

1. В треугольной пирамиде  $ABCD$

грани  $ABD$  и  $ACD$  являются равносторонними

треугольниками (смотрите чертеж).

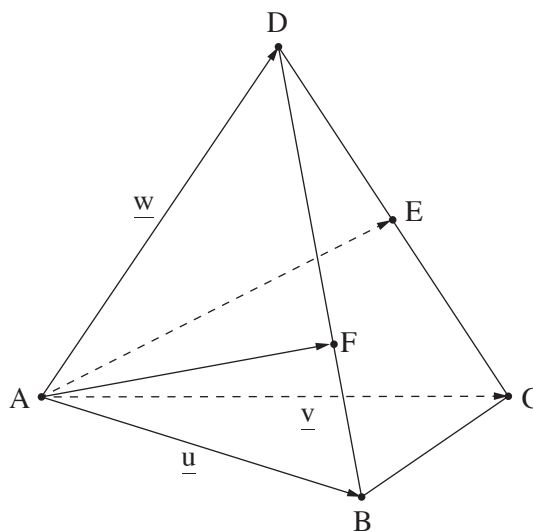
Точка  $E$  – это середина ребра  $CD$ .

Точка  $F$  находится на ребре  $BD$

и делит его в отношении  $BF : FD = 1 : 2$ .

Обозначим:  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$ .

Дано:  $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 6$ ,  $\angle BAC = 45^\circ$ .



(\*) Вычислите приведенные ниже скалярные произведения:

$$\underline{u} \cdot \underline{v}, \underline{u} \cdot \underline{w}, \underline{v} \cdot \underline{w}.$$

(\*) (1) Выразите векторы  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{BD}$  с помощью  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  и  $\underline{w}$  (при необходимости).

(2) Выразите векторы  $\overrightarrow{AE}$  и  $\overrightarrow{AF}$  с помощью  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  и  $\underline{w}$  (при необходимости).

(\*) Ниже приведены три утверждения, (1)–(3). Определите, какие из этих утверждений верны, а какие – неверны. Обоснуйте каждый ответ.

(1)  $\overrightarrow{CD}$  перпендикулярен  $\overrightarrow{AE}$ .

(2)  $\overrightarrow{CD}$  перпендикулярен  $\overrightarrow{AF}$ .

(3)  $\overrightarrow{CD}$  перпендикулярен плоскости  $AEF$ .

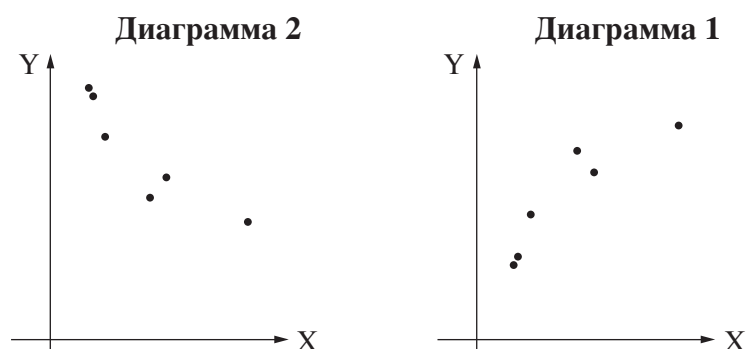
2. Директор компании проверил связь между месячными расходами компании на рекламу ее продукции и доходами от ее продаж в следующий месяц. Он проверил данные нескольких месяцев подряд.

В таблице представлены данные о расходах и доходах в тысячах шекелей:

|                                         |     |     |     |     |     |     |
|-----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Расходы на рекламу (X)                  | 9   | 10  | 13  | 24  | 28  | 48  |
| Доходы от продажи в следующий месяц (Y) | 180 | 200 | 300 | 450 | 400 | 510 |

Директор посчитал и выяснил, что среднее значение [אמצע] расходов в месяц на рекламу  $\bar{X} = 22$  и среднее квадратичное отклонение [סטיית ריבוע]  $S_x = 13.6$ . Среднее значение доходов от продаж в месяц  $\bar{Y} = 340$ , а среднее квадратичное отклонение  $S_y = 123.4$ .

Ниже приведены две диаграммы распределения (1)–(2). Одна из них описывает связь между двумя переменными (X и Y).



- (א) Какая диаграмма из двух диаграмм (1)–(2) описывает связь между этими двумя переменными? Обоснуйте свой ответ.  
 Даны четыре коэффициента корреляции:  $r = -0.7$ ,  $r = -0.9$ ,  $r = 1$ ,  $r = 0.9$ .
- (ב) Один из четырех коэффициентов корреляции соответствует данным. Определите, какой из них, и обоснуйте свой ответ.
- (ג) Каково уравнение прямой регрессии для прогнозирования доходов от продаж в зависимости от расходов на рекламу?
- (ד) Согласно прямой регрессии, которую вы нашли, каковы прогнозируемые доходы от продаж (в тысячах шекелей) при расходе 19000 шекелей в месяц на рекламу? Обоснуйте свой ответ.

Компания конвертировала расходы и доходы в шекелях в расходы и доходы в долларах (поэтому все числа в таблице уменьшились приблизительно в 3 раза).

- (ה) Каково влияние конвертирования шекелей в доллары на каждую из величин (1)–(3), приведенных ниже: она увеличилась, уменьшилась или не изменилась?  
 Обоснуйте свои ответы.

- (1)  $\bar{X}$   
 (2)  $S_x$   
 (3)  $r$

**Раздел второй – рост и затухание, дифференциальное  
и интегральное исчисление показательных и логарифмических функций**

3. Дана функция  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ .

- (א) Какова область определения функции  $f(x)$  ?
- (ב) Найдите координаты точки пересечения графика функции  $f(x)$  с осью  $x$ .
- (ג) Найдите координаты точек экстремума функции  $f(x)$  и определите их тип.
- (ד) Найдите области возрастания и убывания функции  $f(x)$ .
- (ה) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция  $g(x)$ , для которой выполняется  $g(x) = -2f(x)$  для любого  $x$ .

- (ו) Начертите схематический график функции  $g(x)$  в системе координат, в которой вы начертили график функции  $f(x)$ .

Обозначим через  $S$  площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $f(x)$ , осью  $x$  и прямой  $x = 3$ .

- (ז) Выразите при помощи  $S$  площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $f(x)$ , графиком функции  $g(x)$  и прямой  $x = 3$ . Обоснуйте свой ответ.

4. Дана функция  $f(x) = a + (\ln x)^2$ .

$a > 0$  – параметр.

(а) Найдите область определения функции  $f(x)$ .

(б) Найдите координаты точки экстремума функции  $f(x)$  и определите ее тип (при необходимости выразите через  $a$ ).

Дана функция  $g(x) = 1 + \ln x$ , определенная в области  $x > 0$ .

(а) Найдите области возрастания и убывания функции  $g(x)$  (если таковые существуют).

(б) Один из графиков I–IV в конце вопроса соответствует графику функции  $f(x)$ , а один из них соответствует графику функции  $g(x)$ .

Определите, какой из них соответствует графику функции  $f(x)$ , а какой – графику функции  $g(x)$ , и обоснуйте свой ответ.

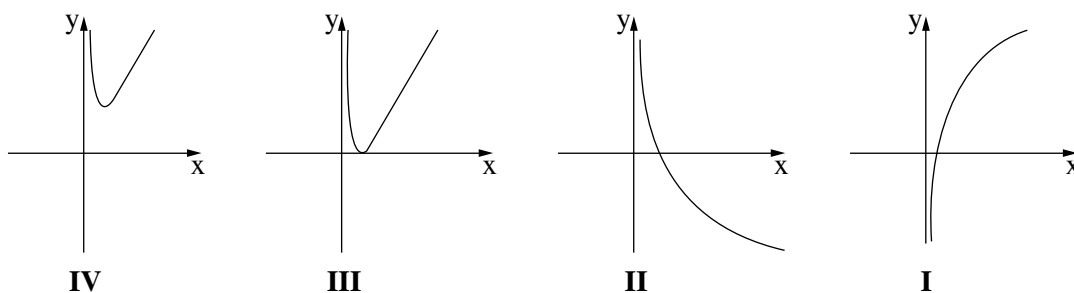
Графики функций  $f(x)$  и  $g(x)$  пересекаются в двух различных точках.

Координата  $x$  одной из этих точек пересечения  $x = e$ .

(в) (1) Найдите  $a$ .

(2) Найдите координаты другой точки пересечения графиков  $f(x)$  и  $g(x)$ .

(3) При каких значениях  $x$  выполняется  $f(x) < g(x)$ ?

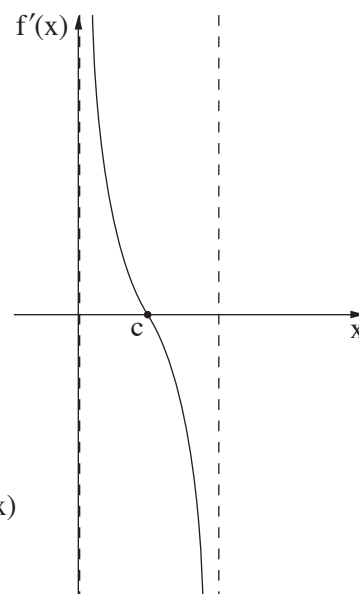


5.  $f(x)$  – это функция. График функции ее производной,  $f'(x)$ , показан на чертеже справа.

График функции производной  $f'(x)$  пересекает ось  $x$  только в одной точке, в которой  $x = c$ .  $c$  – параметр.

- (х) Найдите по графику тип точки экстремума функции  $f(x)$ .

Обоснуйте свой ответ.



Дано:  $f(x) = \ln(4x - x^2)$ .

- (а) Найдите область определения функции  $f(x)$ .  
 (б) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осями координат (если таковые имеются).

В своем ответе оставьте две цифры после десятичного знака.

- (в) Найдите координаты точки экстремума функции  $f(x)$  и напишите значение  $c$ .  
 (г) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ .

- (д) Найдите области, в которых  $g(x)$  положительна. Обоснуйте свой ответ.

**Желаем успеха!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
 Копировать или публиковать можно только  
 с разрешения Министерства просвещения

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
 אין להעתיק או לפרסם  
 אלא ברשות משרד החינוך