

Attention : ce questionnaire comporte des instructions particulières.
Répondez aux questions d'après ces instructions.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה!

Mathématiques

5 unités d'étude - deuxième questionnaire

Instructions

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות

א. Durée de l'examen : deux heures et quart.

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire, qui comporte deux parties, est constitué de cinq questions.

Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.

Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissances, fonctions exponentielles et logarithmiques.

Répondez à trois questions au choix, au moins une question de chaque partie — $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ points.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק

$$- 3 \times 33 \frac{1}{3} = 100 \text{ נקודות.}$$

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.

L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à trois des questions 1-5, au moins une question de chaque partie ($33\frac{1}{3}$ points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de trois questions, seules les trois premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes

1. Soit les points $A(-5, 3)$ et $B(0, -2)$.

א. Déterminez l'équation du lieu géométrique des centres des cercles qui ont AB pour corde.

Le cercle M est l'un des cercles qui ont AB pour corde.

Les points d'intersection du cercle M avec l'axe des abscisses sont les foyers d'une ellipse d'équation canonique.

ב. Déterminez les coordonnées du centre du cercle M ainsi que son rayon.

On sait que la longueur de l'axe principal de l'ellipse est égale à la longueur du diamètre du cercle M .

ג. Quelle est l'équation de l'ellipse ?

On note F le foyer droit de l'ellipse. Une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses passe par le foyer gauche de l'ellipse.

Cette droite coupe l'ellipse aux points Q et T , et le cercle M aux points K et L .

ד. Déterminez le rapport entre l'aire du triangle KLF et l'aire du triangle TQF .

2. Soit une pyramide OABC dont la base est un triangle ABC .

On note : $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{w}$.

Données : $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$, $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$.

Le point H vérifie $\overrightarrow{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. t , s et k sont des paramètres.

On sait que $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à la base ABC de la pyramide.

א. Démontrez que $t = s = k$.

Le point M qui se trouve sur la base ABC de la pyramide, est le point d'intersection des médianes de cette base.

ב. Démontrez que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, puis expliquez pourquoi OM est la hauteur de la pyramide relative à la base ABC .

Le point P se trouve sur la droite ℓ sur laquelle repose la hauteur relative à la base ABC .

ג. Exprimez en fonction de $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ le vecteur $\overrightarrow{OP}$ pour lequel le volume de la pyramide PABC vaut le double du volume de la pyramide OABC (deux possibilités).

On place la pyramide OABC dans un repère. Le point O se trouve à l'origine du repère, le point A se trouve sur la partie positive de l'axe des abscisses, le point B se trouve sur la partie positive de l'axe des ordonnées, et le point C se trouve sur la partie positive de l'axe des cotes.

Donnée : $|\underline{u}| = a$

ד. Déterminez la représentation paramétrique de la droite ℓ sur laquelle se trouve le segment OP .

ה. Exprimez l'équation du plan ABC en fonction de a .

ו. On sait que le volume de la pyramide OABC vaut $20\frac{5}{6}$. Calculez a .

3. Le nombre $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ se trouve dans le plan de Gauss, dans le troisième quadrant.

Donnée : $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. Déterminez α .

Donnée : $|2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$.

ב. Déterminez R .

ג. Soit l'équation $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z est le nombre que vous avez déterminé).

Montrez que $\frac{z}{\bar{z}}$ est l'une des solutions de cette équation.

ד. Le triangle ABC est un triangle isocèle. Les sommets B et C de sa base correspondent aux nombres $\frac{z}{\bar{z}}$ et $\frac{\bar{z}}{z}$.

Le sommet principal A correspond au nombre $z + k$, k étant un nombre imaginaire pur.

(1) Quelle est la valeur de k ?

(2) Calculez l'aire du quadrilatère $ABOC$ (le point O est l'origine du repère).

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissances, fonctions exponentielles et logarithmiques

4. Soit la fonction $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ définie pour tout x , a est un paramètre.

- א. (1) Déterminez l'intervalle sur lequel la fonction $f(x)$ est positive.
 (2) Déterminez les abscisses des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

On sait que l'aire comprise entre le graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ et l'axe des abscisses vaut $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

- ב. Déterminez la valeur de a .

Substituez $a = 1$, puis répondez aux articles ג-ה.

- ג. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

La fonction $f(x)$ est la dérivée de la fonction $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

- ד. (1) Quel est l'intervalle de croissance de la fonction $g(x)$? Justifiez.
 (2) Combien de points d'inflexion la fonction $g(x)$ admet-elle? Justifiez.

On note B le point d'inflexion pour lequel la valeur de la fonction $g(x)$ est la plus grande parmi tous ses points d'inflexion.

On sait que l'ordonnée du point B vaut $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

- ה. Déterminez la fonction $g(x)$.

5. Soit une fonction $f(x)$ vérifiant les propriétés suivantes : la fonction est définie pour tout x et est continue, la fonction est impaire, la droite $y = 0$ est une asymptote de la fonction, la fonction admet un point de minimum unique dont les coordonnées sont $(-1, -a)$, a est un paramètre positif.

א. Tracez une esquisse possible du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $h(x) = \ln(f(x))$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $h(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $h(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).
- (3) Déterminez l'intervalle des valeurs de a pour lequel le graphe de la fonction $h(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points.
- (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $h(x)$, si l'on sait que son graphe coupe l'axe des abscisses en deux points.

Données : $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$g(x)$ est une fonction vérifiant $g'(x) = f(x)$ et également $g(0) = 0$.

- א. (1) Déterminez la fonction $g(x)$.
- (2) La fonction $g(x)$ est-elle paire, impaire ou ni paire ni impaire ? Justifiez.

Soit l'intégrale $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

- א. Quelle valeur de t vérifie $2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx = \int_{-5}^5 g(x) dx$? Justifiez.

Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך