

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Répondez aux questions suivant ces instructions.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה!

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions au choix – $5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם — $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à cinq des questions 1-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Quatre coureurs participent à une course de relais sur un parcours dont la longueur est de 1 440 mètres. Le parcours est divisé en 4 sections égales et au début de chacune des sections se tient l'un des coureurs.

Lorsque le coup de feu de départ est tiré, le premier coureur s'élance. Immédiatement après que le premier coureur a atteint la fin de la première section, le deuxième coureur s'élance à son tour, et ainsi de suite jusqu'à ce que le quatrième coureur atteigne la fin de sa section.

La vitesse du deuxième coureur est 1,5 fois plus grande que celle du premier coureur, la vitesse du troisième coureur est 2 fois plus petite que celle du deuxième coureur et la vitesse du quatrième coureur est égale à celle du troisième coureur. La vitesse de chacun des coureur est constante tout au long de sa section.

Les quatre coureurs ont accompli ensemble la totalité du parcours en trois minutes et 54 secondes en tout.

⌘. Déterminez la vitesse de course de chacun des coureurs.

Le troisième coureur et le quatrième coureur se sont entraînés afin d'augmenter leur vitesse de course.

Après cela, les quatre coureurs ont de nouveau participé à une course de relais, sur le même parcours. Chacun d'eux a couru sur la même section que la fois précédente. Le temps de course total effectué par le troisième coureur et le quatrième coureur était 1,5 fois plus grand que le temps de course total effectué par les deux premiers coureurs. Le premier coureur et le deuxième coureur ont couru à la même vitesse que la fois précédente.

À chaque fois que le troisième coureur a parcouru 100 mètres, il a mis 2,5 secondes de moins que le quatrième coureur.

- ⌘. (1) Déterminez de combien de secondes le temps de course du troisième coureur était plus court que celui du quatrième coureur.
- (2) Est-ce que chacun de ces deux coureurs, le troisième et le quatrième, a augmenté sa vitesse de course ? Justifiez votre réponse.

2. Soit une suite géométrique infinie A de terme général a_n et de raison q .

א. Démontrez que tout n entier naturel vérifie $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

Pour les $2k$ premiers termes de la suite A , il est vérifié que le produit des deux termes situés au milieu de la suite vaut $10935 \cdot a_1$.

Donnée : $a_{2k-2} = 1215$.

א. Déterminez q (deux possibilités).

Donnée : $a_1 = 5$.

א. (1) Déterminez si la suite A est une suite croissante, une suite décroissante ou bien une suite ni croissante ni décroissante. Justifiez votre réponse.

(2) Déterminez k .

À partir de la suite A on construit la suite infinie B de cette manière : $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

א. Démontrez que la suite B est une suite géométrique.

Dans la suite B on change le signe de tous les termes situés aux emplacements impairs de manière à obtenir la suite C suivante : $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

א. Déterminez la somme de la suite C .

3. Dans une grande ville d'Israël on a effectué un sondage afin d'évaluer le niveau de maîtrise de la langue anglaise au sein des habitants de cette ville.

De nombreuses personnes ont participé à ce sondage : des adultes et des jeunes.

Ce sondage a révélé que le nombre d'adultes maîtrisant l'anglais est 3 fois plus grand que le nombre de jeunes qui le maîtrisent, et que le nombre d'adultes ne maîtrisant pas l'anglais est $2\frac{2}{3}$ fois plus grand que le nombre d'adultes qui le maîtrisent.

On note p la probabilité de choisir au hasard un jeune qui maîtrise l'anglais parmi tous les participants du sondage.

א. Déterminez la probabilité de choisir au hasard un adulte qui maîtrise l'anglais parmi tous les adultes qui ont participé au sondage.

א. On choisit au hasard trois adultes parmi les adultes qui ont participé au sondage. Déterminez la probabilité qu'exactement deux d'entre eux maîtrisent l'anglais.

א. (1) Exprimez en fonction de p la probabilité de choisir au hasard un jeune qui ne maîtrise pas l'anglais parmi l'ensemble des participants du sondage.

(2) Montrez que l'intervalle des valeurs possibles de p est $0 < p < \frac{1}{12}$.

On sait que la probabilité de choisir au hasard un adulte parmi les participants du sondage qui ne maîtrisent pas l'anglais est égale à la probabilité de choisir au hasard un jeune parmi les participants du sondage qui ne maîtrisent pas l'anglais.

א. Déterminez la valeur de p .

א. Les événements "maîtriser l'anglais" et "être un adulte" sont-ils dépendants l'un de l'autre ? Justifiez votre réponse.

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Dans le rectangle ABCD, le point E se trouve sur le côté AD.

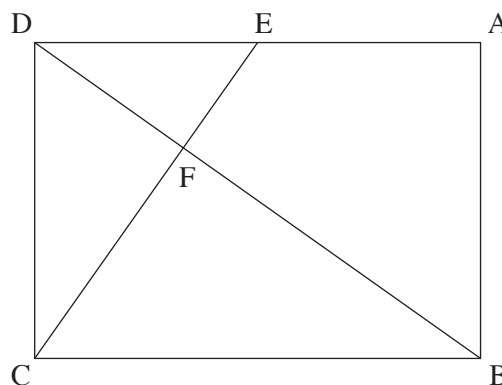
Le segment CE coupe la diagonale BD en un point F.

Le quadrilatère EABF peut être inscrit dans un cercle.

א. Démontrez que $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

Donnée : $DE = EA$.

ב. Calculez le rapport $\frac{EF}{FC}$.



On note S l'aire du triangle DEF.

ג. Exprimez les aires des triangles DFC et BFC en fonction de S .

ד. Calculez le rapport de similitude entre le triangle DAB et le triangle BFC.

On note : $DE = a$.

ה. (1) Exprimez la longueur de la diagonale BD en fonction de a .

(2) Exprimez le diamètre du cercle dans lequel est inscrit le quadrilatère EABF en fonction de a .

5. Soit un cercle dont le centre est un point O et dont le rayon est R .

À partir d'un point A extérieur au cercle, on trace une droite tangente au cercle en un point D, ainsi qu'une autre droite, qui coupe le cercle en un point B, tel que cela est décrit dans la figure.

On note $\angle AOD = \alpha$, $\angle AOB = \beta$.

א. Exprimez en fonction de α , β et de R , si nécessaire :

(1) La longueur du segment AO.

(2) La longueur du segment AB.

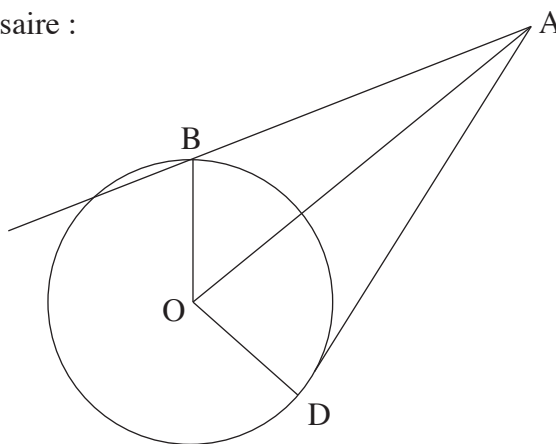
Donnée : $AB = \sqrt{2} R$.

ב. Démontrez que $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

Le triangle ADO est inscrit dans un autre cercle, de rayon r .

Donnée : $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. Déterminez la mesure des angles α et β .



Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + a}}$, a est un paramètre positif.

⌘. Exprimez le domaine de définition de la fonction $f(x)$ en fonction de a .

On sait que la fonction $f(x)$ n'admet pas d'asymptotes perpendiculaires aux axes.

Ⓐ. (1) Déterminez a .

(2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.

(3) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.

(4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit les fonctions $g(x) = -f(x + 2)$, $h(x) = |f(x)|$.

Ⓐ. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$ ainsi que le domaine de définition de la fonction $h(x)$.

(2) L'ordonnée du point de maximum de la fonction $g(x)$ est-elle supérieure, inférieure ou égale à l'ordonnée du point de maximum de la fonction $h(x)$? Justifiez votre réponse.

Données : $\int_{-1}^3 h(x) dx = \int_{-3}^k g(x) dx$, $k > -3$.

Ⓐ. Déterminez k . Expliquez votre réponse.

7. Soit la fonction $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, définie pour tout x .

- א. La fonction $f(x)$ est-elle paire ? Justifiez.
- ב. Démontrez que tout x vérifie $-2 \leq f(x) \leq 0$.
- ג. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.
- ד. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$.

Soit la fonction $g(x) = f(2x)$, définie pour tout x .

ה. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, puis déterminez leur type.

ו. Donnée : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$.

Exprimez $\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (g'(x) - f'(x)) dx$ en fonction de S . Expliquez votre réponse.

8. Soit la fonction $f(x) = x^3 + 4x^2$, définie pour tout x .

Le point B se trouve sur le graphe de la fonction $f(x)$ dans le deuxième quadrant (voir figure).

À partir du point B , on trace une tangente au graphe de la fonction $f(x)$.

La tangente coupe l'axe des ordonnées en un point C .

On note t l'abscisse du point B .

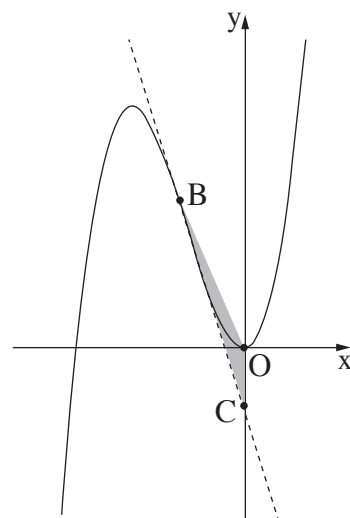
א. Exprimez en fonction de t l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x)$ au point B .

On sait que le point C se trouve en-dessous de l'axe des abscisses.

ב. Quel est l'intervalle des valeurs de t ?

Le point O est l'origine du repère.

ג. Déterminez l'aire maximale du triangle OBC .



Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך