

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут.

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – алгебра и теория вероятности
Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости
Раздел третий – дифференциальное и интегральное
исчисление полиномов, функций, содержащих корни,
рациональных функций и тригонометрических функций
Вы должны ответить на пять вопросов по выбору –
 $5 \times 20 = 100$ баллов.

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות
רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם –
 $20 \times 5 = 100$ נקודות.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.
תתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован!

הוראות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל פעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Вопросы

Обратите внимание: объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.
Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на пять из вопросов 1–8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Легковая машина выехала из Беэр-Шевы в Хайфу и ехала с постоянной скоростью v_1 . В тот же самый момент времени из Хайфы в Беэр-Шеву выехал грузовик с постоянной скоростью v_2 . Расстояние между Хайфой и Беэр-Шевой составляет 210 км.

Грузовик остановился на обочине из-за поломки до того, как мимо него проехала эта легковая машина. В этот момент времени расстояние между грузовиком и легковой машиной составляло 96 км.

- (*) Выразите при помощи v_1 и v_2 время, прошедшее с момента начала поездки и до того, как грузовик остановился на обочине.

Время, в течение которого грузовик находился на обочине, было в 1.5 раза больше времени, которое прошло с момента его выезда из Хайфы и до момента остановки.

Грузовик снова начал ехать с той же скоростью, v_2 , в тот самый момент, когда мимо него проехала легковая машина.

- (*) Найдите отношение между скоростью легковой машины и скоростью грузовика.

Через 128 минут после того, как грузовик вновь начал ехать, он приехал в Беэр-Шеву.

- (*) Найдите скорость легковой машины и скорость грузовика.

2. Последовательность I – это бесконечная геометрическая прогрессия, члены которой

$a_1, a_2, a_3, \dots$, а знаменатель которой $9 \cdot r^2$.

Дано: $0 < r < \frac{1}{3}$.

Между каждыми двумя членами прогрессии I поместили дополнительный член и получили новую убывающую геометрическую прогрессию, прогрессию II, члены которой $b_1, b_2, b_3, \dots$, а знаменатель которой q .

(*) (1) Выразите q при помощи r .

(2) Объясните, почему обе прогрессии, I и II, сходятся.

Дано, что сумма прогрессии II в $\frac{4}{3}$ раза больше суммы прогрессии I.

(*) Вычислите q .

Дано, что сумма членов прогрессии II, расположенных на чётных местах, равна 12.

(*) Найдите сумму всех членов прогрессии II, расположенных на местах, номера которых делятся на 5 ($b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$).

(*) В прогрессии II найдите отношение между пятым членом и суммой всех ее членов, которые находятся в прогрессии после этого члена.

(*) Докажите, что в каждой сходящейся геометрической прогрессии отношение между любым членом и суммой всех членов прогрессии, находящихся после него, не зависит от местоположения данного члена в прогрессии.

3. Нета играет в игру. В этой игре есть в точности три возможных результата: выигрыш, ничья и проигрыш.

Вероятность того, что Нета выиграет, в 3 раза больше вероятности того, что она проиграет в игре.

Обозначим через p вероятность того, что Нета проиграет в игре ($p > 0$).

В данном вопросе результаты игр не зависят друг от друга.

Дано, что если Нета играет 2 игры одну за другой, то вероятность того, что она выиграет, по меньшей мере, один раз, равна $4.5p$.

(*) Найдите значение p .

Нета сыграла 5 игр одну за другой.

(*) Найдите вероятность того, что Нета выиграет, по меньшей мере, три игры.

(*) Найдите вероятность того, что Нета выиграет, по меньшей мере, три первые игры.

(*) (1) Найдите вероятность того, что Нета не проиграет ни одной игры.

(2) Известно, что Нета проиграла, по меньшей мере, одну игру. Какова вероятность того, что она выиграла три первые игры и сыграла вничью последнюю игру?

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Дана окружность, радиус которой R , а центр – O .

Из точки A , которая находится за пределами окружности, провели три прямые:

прямую AB , касательную к данной окружности в точке B ,

прямую AD , которая проходит через центр O окружности

и пересекает окружность в точках C и D ,

и прямую AG , перпендикулярную прямой AD (смотрите чертеж).

Точки D , B и G расположены на одной прямой,

как показано на чертеже.

Обозначим: $\angle ADB = \alpha$.

(*) Выразите все углы треугольника ABG при помощи α .

(2) Докажите: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

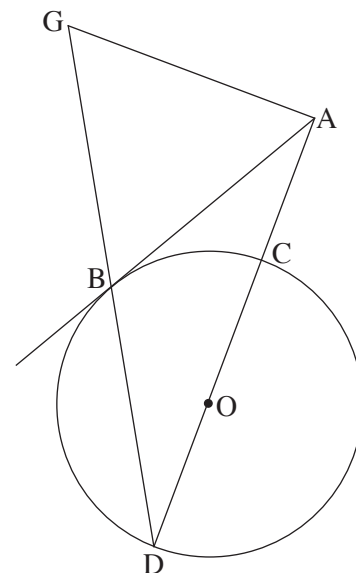
Дано: $AC = \frac{1}{2}DC$, $AG = 8$.

(3) Вычислите R .

Обозначим через S площадь треугольника BDC .

(7) (1) Докажите: $\triangle ADG \sim \triangle BDC$.

(2) Выразите площадь треугольника ADG при помощи S .



5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с радиусом R и центром O (смотрите чертеж).

Обозначим: $\angle DAB = \alpha$, α – острый угол.

(*) Выразите длину диагонали BD при помощи α и R .

Дано: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

(2) Вычислите α .

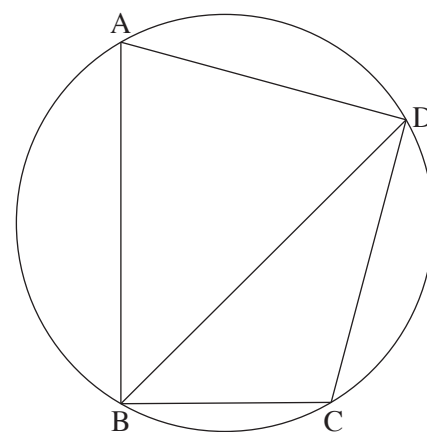
Дано: BD – биссектриса угла ABC .

(3) Вычислите величину угла ABD .

Обозначим как h_1 высоту, опущенную из вершины A треугольника ABD ,

и как h_2 – высоту, опущенную из вершины O треугольника BOD .

(7) Вычислите $\frac{h_1}{h_2}$.



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция: $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

(*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Является ли функция $f(x)$ четной функцией, нечетной функцией или не четной и не нечетной функцией? Докажите свой ответ.

(3) Найдите области возрастания и области убывания функции $f(x)$.

Даны две функции: $f'(x)$ и $g(x)$.

$f'(x)$ – это функция производной $f(x)$, а для $g(x)$ выполняется $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

Функции $f'(x)$ и $g(x)$ определены в той же области, что и функция $f(x)$.

(*) Каждый из графиков I–III описывает одну из функций, $f(x)$, $f'(x)$ и $g(x)$.

Для каждой из этих функций напишите, какой график описывает ее. Обоснуйте свой ответ.

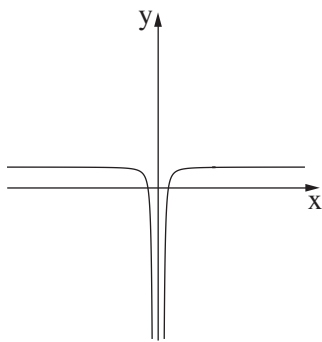


График III

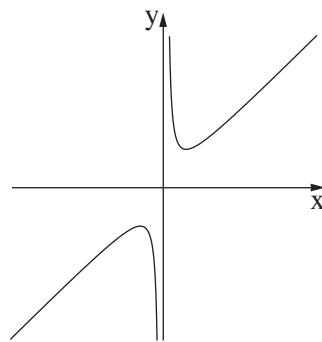


График II

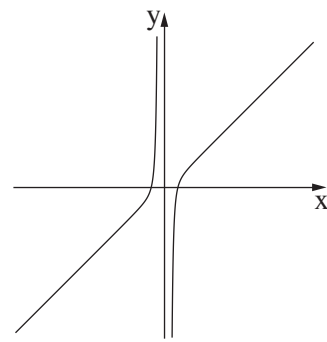


График I

(*) Найдите координаты точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x .

(*) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = \frac{1}{4}$ и $x = 4$.

(*) Дано: $1 < a$ – параметр. Вычислите $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$.

Дана функция $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$. Дано, что функция $h(x)$ определена в области $1 \leq x$.

(*) Найдите координаты точки экстремума функции $h(x)$ и определите ее тип.

7. Дана функция: $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x}$ в интервале $0 \leq x \leq 2\pi$.

(*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Объясните, почему у функции $f(x)$ нет асимптот, перпендикулярных оси x .

(3) Найдите точки пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.

(*) (1) Покажите, что для любого x в области определения функции $f(x)$ выполняется:

$$f'(x) = \cos x - \sin x.$$

(2) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(*) (1) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(2) k – это число. Найдите все значения k , для которых у уравнения $f(x) = k$ есть единственное решение (в области $0 \leq x \leq 2\pi$).

(*) (1) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции производной $f'(x)$, осью x и двумя прямыми $x = \frac{3}{4}\pi$ и $x = \frac{5}{4}\pi$.

8. Даны две функции: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$ и область определения функции $g(x)$.

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с графиком функции $g(x)$.

Точка A – такая точка на графике функции $f(x)$, а точка B – такая точка на графике функции $g(x)$, что отрезок AB параллелен оси x .

Дано, что координата x точки A находится между координатами x точек пересечения графика функции $f(x)$ с графиком функции $g(x)$.

Обозначим как t координату x точки A . t – параметр.

(*) Выразите при помощи t длину отрезка AB .

(*) Точка O – это точка начала координат. Найдите максимальную площадь треугольника OAB .

(*) Получается ли максимальная площадь треугольника OAB тогда, когда длина отрезка AB максимальна? Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.