

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика
5 единиц обучения – второй вопросник

תוכנית חדשה

מ ת מ ט י ק ה
5 יחידות לימוד – שאלון שני

Указания

- א. Продолжительность экзамена: 2 часа 15 минут.
- ב. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции
Вы должны ответить на три вопроса по выбору, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела –
 $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начиная ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован!

הוראות

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק –
 $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Вопросы

Обратите внимание: объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Даны две окружности, касательные друг к другу снаружи.

Центр одной окружности находится в точке M , а ее уравнение: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$,

a – положительный параметр.

Центр другой окружности находится в точке N , а ее уравнение: $(x - 13)^2 + y^2 = R^2$.

Длина отрезка, соединяющего центры этих окружностей, равна 9, а соотношение длин радиусов этих окружностей равно 1:2, $r < R$.

(а) Найдите уравнение окружности с центром в точке N и два возможных уравнения окружности с центром в точке M .

Дано: $a < 13$.

(б) Начертите в одной системе координат схематический график двух этих окружностей и всех общих касательных к этим окружностям.

(в) Найдите уравнение касательной, проходящей через общую точку обеих этих окружностей.

(г) Прямая $mx - y + n = 0$ является касательной, общей для обеих этих окружностей. Найдите m и n (две возможности).

Даны две другие окружности, касательные друг к другу снаружи.

Уравнения этих окружностей: $(x - t)^2 + y^2 = r^2$; $(x - k)^2 + y^2 = R^2$, t и k – параметры.

Значения радиусов r и R равны значениям, которые вы нашли в пункте (а).

(д) Возможно ли, что две прямые, уравнения которых вы нашли в пункте (г), являются касательными также и к этим окружностям?

Если да – найдите t и k . Если нет – обоснуйте.

2. Даны четыре точки, расположенные в одной плоскости: $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$,

p – параметр.

- (а) Найдите уравнение плоскости $ABCD$.
- (б) Вычислите значение параметра p .
- (в) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является квадратом.

Точка S – это вершина пирамиды $SABCD$, основанием которой является $ABCD$.

Ребро SC лежит на прямой $\underline{x} = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.

Дано, что объем пирамиды равен 81.

- (г) Найдите координаты точки S (две возможности).

Дана дополнительная плоскость π , перпендикулярная ребру SC .

- (д) Найдите угол между плоскостью $ABCD$ и плоскостью π .

3. Дано уравнение: $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z – комплексное число.

z_1 – одно из решений этого уравнения, которое представляет точку, находящуюся в плоскости Гаусса в первом квадранте, на окружности, центр которой находится в точке начала координат.

- (а) Найдите уравнение этой окружности.

В данную окружность вписывают квадрат, одна из вершин которого представлена числом z_1 .

- (б) Вычислите площадь этого квадрата.
- (в) Найдите координаты остальных вершин квадрата.

Умножают каждое из чисел, представляющих две вершины квадрата, лежащие в первом и третьем квадрантах, на $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, и умножают каждое из чисел, представляющих две вершины квадрата, лежащие во втором и четвертом квадрантах, на $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 30^\circ) + i \sin(\alpha + 30^\circ))$.

Точки в плоскости Гаусса, представляющие результаты, которые были получены при умножении, создают новый выпуклый четырехугольник в плоскости Гаусса.

Дано: r_1 и r_2 – положительные, $r_1 \neq r_2$.

- (г) Четырехугольник какого вида был получен? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что площадь полученного четырехугольника в $\sqrt{3}$ раз больше площади четырехугольника, которую вы вычислили в пункте (б).

- (д) Вычислите $r_1 \cdot r_2$.

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$, определенная для любого x .

- (א) (1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных оси y (если таковые существуют).
- (2) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью y .
- (3) Найдите области возрастания и области убывания функции $f(x)$.
- (4) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{1 - e^x}{e^x - x}$, определенная для любого x .

- (ב) (1) Найдите уравнения асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных оси y .
- (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x (если таковые существуют).
- (3) Докажите, что $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$.
- (ג) С помощью схематического графика функции $f(x)$ найдите, сколько точек максимума и сколько точек минимума есть у функции $g(x)$. Обоснуйте свой ответ.
- (ד) Начертите схематический график функции $g(x)$.
- (ה) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$, осью x и прямой $x = -1$.

5. Дана функция $f(x) = x + \ln(x^2 - 8)$.

- (א) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).
- (3) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.
- (4) Начертите схематический график функции $f(x)$.

$f'(x)$ – функция производной функции $f(x)$.

- (ב) (1) Найдите область определения функции производной $f'(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции производной $f'(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите координаты точек пересечения графика функции производной $f'(x)$ с осями координат (если таковые существуют).
- (4) Начертите схематический график функции производной $f'(x)$, если известно, что у нее нет точек экстремума.

Дана функция $g(x) = e^{f(x)}$, определенная в той же области, что и функция $f(x)$.

- (ג) (1) Найдите координаты точки экстремума функции $g(x)$ и определите ее тип.
- (2) Найдите области возрастания и области убывания функции $g(x)$.
- (ד) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = f'(x) \cdot g(x)$, осью x и прямыми $x = -4$ и $x = -5$.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.