

Attention : ce questionnaire comporte des instructions particulières.
Répondez aux questions d'après ces instructions.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude - deuxième questionnaire

Instructions

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות

א. Durée de l'examen : deux heures et quart.

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire, qui comporte deux parties, est constitué de cinq questions.

Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.

Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissances, fonctions exponentielles et logarithmiques.

Répondez à trois questions au choix, au moins une question de chaque partie — $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ points.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק

$$- 3 \times 33 \frac{1}{3} = 100 \text{ נקודות.}$$

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.

L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי

הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à trois des questions 1-5, au moins une question de chaque partie ($33\frac{1}{3}$ points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de trois questions, seules les trois premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes

1. Soit deux cercles tangents l'un à l'autre par l'extérieur.

L'un de ces cercles a son centre en un point M , et son équation est $(x - a)^2 + y^2 = r^2$,
 a est un paramètre positif.

L'autre cercle a son centre en un point N , et son équation est $(x - 13)^2 + y^2 = R^2$.

La longueur du segment reliant les centres de ces cercles vaut 9, et le rapport entre les longueurs des rayons des cercles est $1:2$, $r < R$.

⌘. Déterminez l'équation du cercle de centre N et les deux possibilités d'équation pour le cercle de centre M .

Donnée : $a < 13$.

Ⓜ. Tracez dans un même repère, une esquisse des deux cercles ainsi que de toutes les tangentes communes aux deux cercles.

Ⓝ. Déterminez l'équation de la tangente passant par le point commun aux deux cercles.

Ⓣ. La droite $mx - y + n = 0$ est une tangente commune aux deux cercles. Déterminez m et n (deux possibilités).

Soit deux autres cercles tangents l'un à l'autre par l'extérieur.

Les équations de ces cercles sont : $(x - t)^2 + y^2 = r^2$; $(x - k)^2 + y^2 = R^2$, t et k sont des paramètres.

Les valeurs des rayons r et R sont identiques à celles que vous avez déterminées à l'article ⌘.

Ⓢ. Est-il possible que les deux droites dont vous avez déterminé les équations à l'article Ⓣ soient tangentes également à ces deux cercles-là ?

Si oui, déterminez t et k . Si non, justifiez.

2. Soit quatre points situés dans un même plan : $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$, p est un paramètre.

א. Déterminez l'équation du plan $ABCD$.

ב. Calculez la valeur du paramètre p .

ג. Démontrez que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Le point S est le sommet de la pyramide $SABCD$ de base $ABCD$.

L'arête SC repose sur la droite $\underline{x} = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$.

On sait que le volume de la pyramide vaut 81.

ד. Déterminez les coordonnées du point S (deux possibilités).

Soit un plan supplémentaire π perpendiculaire à l'arête SC .

ה. Déterminez l'angle formé par le plan $ABCD$ et le plan π .

3. Soit l'équation $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z est un nombre complexe.

z_1 est l'une des solutions de cette équation, et il représente un point situé dans le plan de Gauss dans le premier quadrant, sur un cercle dont le centre est situé à l'origine du repère.

א. Déterminez l'équation du cercle.

Dans ce cercle, on inscrit un carré dont l'un des sommets est représenté par le nombre z_1 .

ב. Calculez l'aire de ce carré.

ג. Déterminez les coordonnées des autres sommets du carré.

On multiplie par $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ chacun des nombres représentant les deux sommets du carré qui sont situés dans le premier et le troisième quadrant, et l'on multiplie par

$r_2 \cdot (\cos(\alpha + 30^\circ) + i \sin(\alpha + 30^\circ))$ chacun des nombres représentant les deux sommets du carré qui sont situés dans le deuxième et le quatrième quadrant.

Les points du plan de Gauss qui représentent les résultats obtenus suite à cette multiplication, forment un nouveau quadrilatère convexe dans le plan de Gauss.

Donnée : r_1 et r_2 sont positifs, $r_1 \neq r_2$.

ד. De quel type est le quadrilatère ainsi obtenu ? Justifiez votre réponse.

On sait que l'aire du quadrilatère obtenu est $\sqrt{3}$ fois plus grand que l'aire du carré que vous avez calculée à l'article ב.

ה. Calculez $r_1 \cdot r_2$.

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissances, fonctions exponentielles et logarithmiques

4. Soit la fonction $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ définie pour tout x .

- א. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires à l'axe des ordonnées (s'il en existe).
- (2) Déterminez les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des ordonnées.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et les intervalles de décroissance de la fonction $f(x)$.
- (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{1 - e^x}{e^x - x}$ définie pour tout x .

- א. (1) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $g(x)$ qui sont perpendiculaires à l'axe des ordonnées.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $g(x)$ avec l'axe des abscisses (s'il en existe).
- (3) Démontrez que $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$.
- א. Aidez-vous de l'esquisse du graphe de la fonction $f(x)$ pour déterminez combien la fonction $g(x)$ admet de points de maximum et combien de points de minimum. Justifiez votre réponse.
- ב. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.
- ג. Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses et par la droite $x = -1$.

5. Soit la fonction $f(x) = x + \ln(x^2 - 8)$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).
- (3) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type.
- (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

$f'(x)$ est la fonction dérivée de la fonction $f(x)$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction dérivée $f'(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction dérivée $f'(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ avec les axes (s'il en existe).
- (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ sachant qu'elle n'admet pas de point d'extremum.

Soit la fonction $g(x) = e^{f(x)}$ définie dans le même intervalle que la fonction $f(x)$.

- א. (1) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $g(x)$, puis déterminez son type.
- (2) Déterminez les intervalles de croissance et les intervalles de décroissance de la fonction $g(x)$.
7. Calculez l'aire délimitée par la fonction $y = f'(x) \cdot g(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = -4$ et $x = -5$.

Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך