

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Répondez aux questions suivant ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions au choix — $5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתך — $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à cinq des questions 1-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Une voiture est partie de Beer-Cheva vers Haïfa à une vitesse constante v_1 . Au même moment exactement, un camion est parti de Haïfa vers Beer-Cheva à une vitesse constante v_2 .

La distance entre Haïfa et Beer-Cheva est de 210 km.

Le camion s'est arrêté sur le bas-côté à cause d'une panne avant que la voiture ne l'ait croisé. À ce moment, la distance entre le camion et la voiture était de 96 km.

- א. Exprimez en fonction de v_1 et de v_2 , le temps qui s'est écoulé depuis le début du trajet jusqu'au moment où le camion s'est arrêté sur le bas-côté.

Le temps d'arrêt du camion sur le bas-côté était 1,5 fois supérieur au temps qui s'est écoulé depuis son départ de Haïfa jusqu'à son arrêt.

Le camion a repris la route à la même vitesse, v_2 , exactement au moment où la voiture l'a croisé.

- ב. Déterminez le rapport entre la vitesse de la voiture et la vitesse du camion.

128 minutes après que le camion a repris la route, il est arrivé à Beer-Cheva.

- ג. Déterminez la vitesse de la voiture et la vitesse du camion.

2. La suite I est une suite géométrique infinie dont les termes sont $a_1, a_2, a_3, \dots$ et dont la raison est $9 \cdot r^2$.

Donnée : $0 < r < \frac{1}{3}$.

Entre chaque couple de termes de la suite I , on a inséré un terme supplémentaire, formant ainsi une nouvelle suite géométrique décroissante, la suite II , dont les termes sont $b_1, b_2, b_3, \dots$ et dont la raison est q .

א. (1) Exprimez q en fonction de r .

(2) Expliquez pourquoi les deux suites, I et II , sont convergentes.

On sait que la somme de la suite II est $\frac{4}{3}$ fois supérieure à la somme de la suite I .

א. Calculez q .

On sait que la somme des termes situés aux emplacements pairs de la suite II vaut 12.

א. Déterminez la somme de tous les termes de la suite II , qui sont situés aux emplacements divisibles par 5 ($b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$).

ב. Déterminez, dans la suite II , le rapport entre le cinquième terme et la somme de tous les termes qui suivent ce terme.

ג. Démontrez que dans toute suite géométrique convergente, le rapport entre un terme, quel qu'il soit, et la somme de tous les termes qui le suivent, ne dépend pas de l'emplacement du terme dans la suite.

3. Netta joue à un jeu. Dans ce jeu, il y a précisément trois résultats possibles : gagner, faire égalité et perdre.

La probabilité que Netta gagne à ce jeu est 3 fois supérieure à la probabilité qu'elle perde.

On note p la probabilité que Netta perde à ce jeu ($p > 0$).

Dans tout cet exercice, les résultats des parties sont indépendants les uns des autres.

Il est donné que si Netta joue deux parties l'une après l'autre, la probabilité qu'elle gagne au moins l'une des parties est de $4,5p$.

א. Déterminez la valeur de p .

Netta a joué 5 parties, l'une après l'autre.

א. Déterminez la probabilité que Netta gagne au moins 3 parties.

ב. Déterminez la probabilité que Netta gagne au moins les trois premières parties.

ב. (1) Déterminez la probabilité que Netta ne perde aucune des parties.

(2) On sait que Netta a perdu au moins l'une des parties. Quelle est la probabilité qu'elle ait gagné les trois premières parties et qu'elle ait fait égalité à la dernière partie ?

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Soit un cercle de rayon R et de centre O .

Trois droites sont issues du point A qui est situé en dehors du cercle :

la droite AB est tangente au cercle au point B ,

la droite AD passe par le centre O du cercle et coupe le cercle aux points C et D ,

et la droite AG est perpendiculaire à la droite AD (voir figure).

Les points D , B et G se situent sur une même droite, tel que cela est décrit sur la figure.

On note : $\angle ADB = \alpha$.

⌘. Exprimez tous les angles du triangle ABG en fonction de α .

Ⓐ. Démontrez que $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

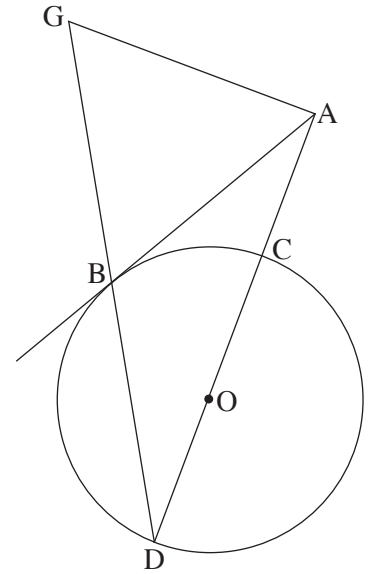
Données : $AC = \frac{1}{2}DC$, $AG = 8$.

Ⓐ. Calculez R .

On note S l'aire du triangle BDC .

Ⓙ. (1) Démontrez que $\triangle ADG \sim \triangle BDC$.

(2) Exprimez l'aire du triangle ADG en fonction de S .



5. Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle de rayon R et de centre O (voir figure).

On note : $\angle DAB = \alpha$, α est un angle aigu.

⌘. Exprimez la longueur de la diagonale BD en fonction de α et de R .

Données : $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

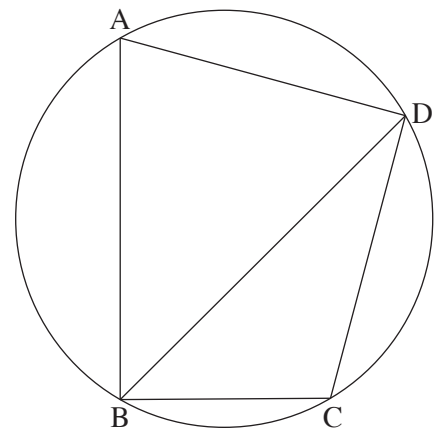
Ⓐ. Calculez α .

Donnée : BD est la bissectrice de l'angle ABC .

Ⓐ. Calculez la mesure de l'angle ABD .

On note h_1 la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD ,
et h_2 la hauteur issue du sommet O dans le triangle BOD .

Ⓙ. Calculez $\frac{h_1}{h_2}$.



Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

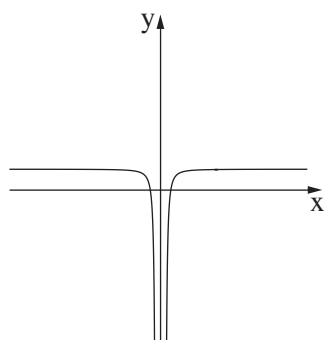
- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) La fonction $f(x)$ est-elle paire, impaire ou bien ni paire ni impaire ? Justifiez votre réponse.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et les intervalles de décroissance de la fonction $f(x)$.

Soit les deux fonctions $f'(x)$ et $g(x)$.

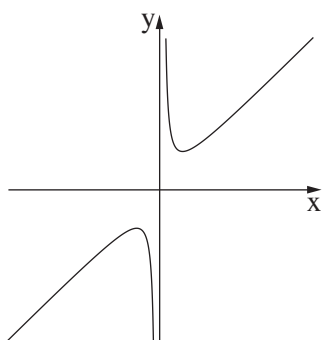
$f'(x)$ est la fonction dérivée de $f(x)$, et $g(x)$ vérifie $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

Les fonctions $f'(x)$ et $g(x)$ sont définies sur le même domaine que la fonction $f(x)$.

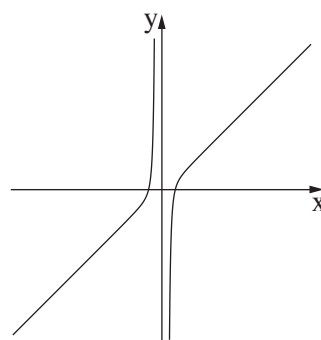
- א. Chacun des graphes I-III ci-dessous représente l'une des fonctions $f(x)$, $f'(x)$ et $g(x)$.
Pour chacune de ces fonctions, indiquez quel graphe la représente. Justifiez votre réponse.



Graphe III



Graphe II



Graphe I

- א. Déterminez les coordonnées des points d'intersection de la fonction $g(x)$ avec l'axe des abscisses.
- ב. Calculez l'aire délimitée par la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses ainsi que par les droites $x = \frac{1}{4}$ et $x = 4$.
- ג. Donnée : $1 < a$ est un paramètre. Calculez $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$.

Soit la fonction $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$. On sait que la fonction $h(x)$ est définie sur l'intervalle $1 \leq x$.

- א. Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $h(x)$, puis déterminez son type.

7. Soit la fonction $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2\cos x}$, sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Expliquez pourquoi la fonction $f(x)$ n'admet pas d'asymptotes perpendiculaires à l'axe des abscisses.
- (3) Déterminez les points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.
- ב. (1) Montrez que tout x situé dans le domaine de définition de la fonction $f(x)$ vérifie $f'(x) = \cos x - \sin x$.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- ג. (1) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
- (2) k est un nombre. Déterminez toutes les valeurs de k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique (sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$).
- ד. Calculez l'aire délimitée par la fonction dérivée $f'(x)$, par l'axe des abscisses ainsi que par les deux droites $x = \frac{3}{4}\pi$ et $x = \frac{5}{4}\pi$.

8. Soit les deux fonctions $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$ ainsi que le domaine de définition de la fonction $g(x)$.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec le graphe de la fonction $g(x)$.

Le point A se trouve sur le graphe de la fonction $f(x)$ et le point B se trouve sur le graphe de la fonction $g(x)$, de sorte que le segment AB est parallèle à l'axe des abscisses.

Il est donné que l'abscisse du point A est située entre les abscisses des points d'intersection de la fonction $f(x)$ avec la fonction $g(x)$.

On note t l'abscisse du point A . t est un paramètre.

- ב. Exprimez la longueur du segment AB en fonction de t .
- ג. Le point O est l'origine du repère. Déterminez l'aire maximale du triangle OAB .
- ד. Obtient-on l'aire maximale du triangle OAB lorsque la longueur du segment AB est maximale ? Justifiez votre réponse.

Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans
l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך