

בהצלחה!

Вопросы

Обратите внимание! Объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на пять из вопросов 1–8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Три пловца – Эйтан, Галь и Яков – тренируются в бассейне длиной 50 метров.

Каждый пловец начинает заплыв в начале бассейна, плывет до конца бассейна, сразу разворачивается и плывет обратно к началу бассейна.

Скорость движения каждого из пловцов постоянна.

В воскресенье каждый из трех пловцов начал свой заплыв в другое время.

Галь начал заплыв через 10 секунд после Эйтана.

Яков начал заплыв через 15 секунд после Эйтана.

Через 15 секунд после того, как Яков начал заплыв, все пловцы проплыли одинаковое расстояние от начала бассейна, но все еще не доплыли до конца бассейна.

Сразу после того, как Галь приплыл к концу бассейна, он развернулся и начал плыть обратно к началу бассейна. На своем пути обратно он встретил Эйтана на расстоянии 4 метров от конца бассейна.

(⌘) Вычислите скорость каждого из трех этих пловцов.

(⌘) На каком расстоянии от конца бассейна Эйтан и Яков встретились во второй раз?

В понедельник Галь и Яков начали заплыв одновременно от начала бассейна, и каждый из них плыл с той же скоростью, что и в воскресенье. Когда каждый из двух этих пловцов доплыл до конца бассейна, он сразу развернулся и поплыл по направлению к началу бассейна, а когда прибыл туда, развернулся снова и поплыл по направлению к концу бассейна, и так далее. Оба эти пловца прекратили заплыв в тот момент, когда они встретились в начале бассейна.

(⌘) Сколько метров проплыл Яков в этот день?

2. Дана возрастающая арифметическая прогрессия A , члены которой $a_1, a_2, a_3, \dots$ и разность которой d .

Обозначим через S_n сумму n первых членов прогрессии A для любого натурального n .

Определим дополнительную последовательность B , члены которой $b_1, b_2, b_3, \dots$. Для членов последовательности B выполняется $b_n = S_{n+1} - S_n$ для любого натурального n .

(*) (1) Является ли последовательность B арифметической прогрессией? Обоснуйте.

(2) Тожественна ли последовательность B прогрессии A ? Обоснуйте.

Обозначим через T_n сумму n первых членов последовательности B для любого натурального n .

(*) Докажите, что для любого четного натурального n выполняется:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}$$

Дано: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$$T_5 = -20$$

(*) Вычислите b_1 и d (можно воспользоваться пунктом (*)).

Складываем один за другим члены прогрессии A , находящиеся на нечетных местах, начиная с первого члена прогрессии.

(*) Какое минимальное число членов прогрессии нужно сложить таким способом, чтобы полученная сумма была целым положительным числом? Обоснуйте.

3. В коробке три конфеты со вкусом клубники и две конфеты со вкусом мяты. Лиор случайным образом вынимает конфету из коробки. Если это конфета со вкусом мяты, он возвращает ее в коробку, а если она со вкусом клубники – он немедленно съедает ее.

(*) Лиор вынимает из коробки одну за другой три конфеты – способом, описанным в начале вопроса.

(1) Вычислите вероятность того, что Лиор съест в точности одну конфету.

(2) Вычислите вероятность того, что Лиор съел вторую конфету, которую он вынул, если известно, что Лиор съел в точности одну конфету.

(*) Лиор вынимает из коробки одну за другой n конфет – способом, описанным в начале вопроса.

Выразите при помощи n вероятность того, что Лиор съест по меньшей мере одну конфету.

(*) Лиор получил две коробки конфет, каждая из них идентична коробке, описанной в начале вопроса.

Лior вынимает по три конфеты из каждой из двух этих коробок – способом, описанным в начале вопроса.

Вычислите вероятность того, что Лиор съест в точности три конфеты, причем все три из одной коробки.

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Треугольник ABC вписан в окружность с радиусом R (смотрите чертеж).

Сторона BC – диаметр этой окружности.

AG – продолжение стороны CA .

Отрезок GB пересекает окружность в точке D .

Дано: $GA = AC$.

(∞) Докажите, что прямая AB – биссектриса $\sphericalangle GBC$.

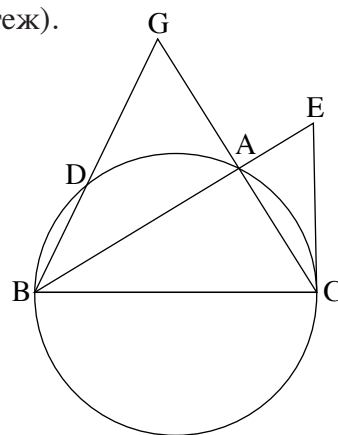
(a) Докажите, что $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

Дано, что $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

(a) Выразите при помощи R длину стороны AC .

Через точку C провели касательную к окружности, которая пересекает продолжение отрезка BA в точке E .

(r) Вычислите, во сколько раз площадь треугольника CBE больше площади треугольника ABC .



5. AB – диаметр окружности с радиусом R и центром O . Хорда CD пересекает диаметр AB в точке F .

Касательная к окружности в точке D пересекает продолжение диаметра AB в точке E (смотрите чертеж).

Обозначим: $\sphericalangle ADE = \alpha$.

(∞) Покажите, что $\sphericalangle BAD = 90^\circ - \alpha$.

Дано, что $ED = FD$.

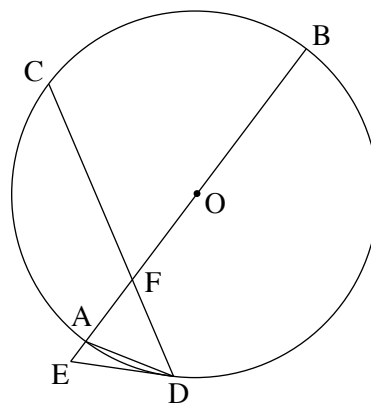
(a) Выразите при помощи α величину $\sphericalangle CDA$.

(a) Выразите при помощи R и α площадь треугольника AFD .

(r) (1) Выразите при помощи α соотношение площадей $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) Дано, что $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

Найдите α .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$, m – положительный параметр.

(א) При необходимости выразите свои ответы при помощи m .

(1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

Известно, что у функции $f(x)$ есть точка экстремума в точке, в которой $x = (-1)$.

(ב) Найдите значение m .

Подставьте в функцию $f(x)$ найденное вами значение m и ответьте на вопросы пунктов (ג)–(ה).

(ג) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(ד) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(ה) Дана функция $g(x) = k \cdot f(x)$, k – отрицательный параметр.

(1) Начертите возможный схематический график функции $g(x)$.

(2) Через левую точку экстремума $g(x)$ проводят перпендикуляр к оси x .

Дано, что площадь фигуры, ограниченной этим перпендикуляром, графиком функции $g(x)$ и осью x , равна 1 (фигура справа от этого перпендикуляра).

Найдите значение k .

7. Дана функция $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

- (*) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите область определения функции производной $f'(x)$.
- (3) Найдите уравнения асимптот функции производной $f'(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (4) Найдите координаты точки пересечения графика функции производной $f'(x)$ с осью x .
 В своем ответе оставьте две цифры после десятичного знака [נקודה עשרונית].
- (5) Начертите схематический график функции производной $f'(x)$, если известно, что у функции производной $f'(x)$ нет точек экстремума.
- (*) (1) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (2) Начертите схематический график функции $f(x)$.
- (*) Возможно ли, что прямая, уравнение которой $y = 4x + c$ (c – параметр), является касательной к графику функции $f(x)$? Обоснуйте.

8. Главный водный канал, постоянная ширина которого a , соединен под прямым углом со вспомогательным водным каналом, постоянная ширина которого b .

Точка C – точка пересечения стенки главного канала со стенкой вспомогательного канала (смотрите чертеж).

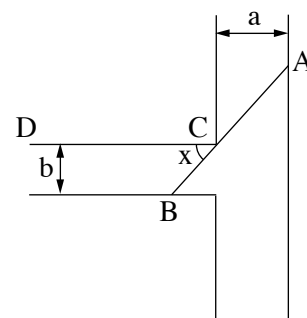
Инженер проектирует прямую плотину, которая выйдет из точки A на стенке главного канала, пройдет через точку C и придет в точку B на стенке вспомогательного канала.

Плотина образует угол величиной x со стенкой CD вспомогательного канала, как показано на чертеже.

(*) Выразите при помощи a , b и x длину плотины AB .

Дано, что $a = 2b$.

- (*) Найдите x , для которого длина плотины AB будет минимальной.
- (*) Известно, что минимальная длина плотины равна 8. Найдите b .



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.