

Attention : ce questionnaire comporte des instructions particulières.
Répondez aux questions d'après ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions au choix — $5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.

L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointe au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך — $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיטה" בראש כל עמוד המשמש טיטה. כתיבת טיטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à cinq des questions 1-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Trois nageurs, Eithan, Gal et Yaacov, s'entraînent dans une piscine de 50 mètres de longueur. Chaque nageur commence au début de la piscine, nage jusqu'au bout de la piscine, fait immédiatement demi-tour puis revient au début de la piscine. La vitesse de nage de chacun des nageurs est constante. Dimanche, chacun des trois nageurs a commencé à nager à un moment différent. Gal a commencé à nager 10 secondes après Eithan. Yaacov a commencé à nager 15 secondes après Eithan. 15 secondes après que Yaacov a commencé à nager, tous les nageurs avaient parcouru la même distance depuis le début de la piscine, mais n'avaient pas encore atteint le bout de la piscine. Immédiatement après que Gal a atteint le bout de la piscine, il a fait demi-tour puis a commencé à nager vers le début de la piscine. En revenant, il a croisé Eithan à une distance de 4 mètres du bout de la piscine.
- א. Calculez la vitesse de chacun des trois nageurs.
 - ב. À combien de mètres du bout de la piscine Eithan et Yaacov se sont-ils croisés pour la deuxième fois ?

Lundi, Gal et Yaacov ont commencé à nager au début de la piscine en même temps, et chacun d'eux a nagé à la vitesse à laquelle il avait nagé dimanche. Lorsque chacun des deux nageurs a atteint le bout de la piscine, il a immédiatement fait demi-tour puis a nagé vers le début de la piscine, puis au moment où il l'a atteint, a fait à nouveau demi-tour et a nagé en direction du bout de la piscine, et ainsi de suite. Les deux nageurs ont cessé de nager à l'instant où ils se sont rencontrés au début de la piscine.

- ג. Combien de mètres Yaacov a-t-il nagé ce jour-là ?

2. Soit une suite arithmétique croissante A dont les termes sont $a_1, a_2, a_3, \dots$, et dont la raison est d .
On note S_n la somme des n premiers termes de la suite A , pour tout n entier naturel.
On définit une suite supplémentaire, B , dont les termes sont $b_1, b_2, b_3, \dots$. Les termes de la suite B vérifient $b_n = S_{n+1} - S_n$, pour tout n entier naturel.

א. (1) La suite B est-elle une suite arithmétique ? Justifiez.

(2) La suite B est-elle identique à la suite A ? Justifiez.

On note T_n la somme des n premiers termes de la suite B , pour tout n entier naturel.

א. Démontrez que tout n entier naturel pair vérifie :

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}.$$

Données : $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$$T_5 = -20$$

א. Calculez b_1 et d (vous pouvez vous aider de l'article ב).

On additionne l'un après l'autre les termes situés aux emplacements impairs de la suite A , en partant du premier terme.

א. Quel est le nombre minimal de termes qu'il faut additionner afin que la somme obtenue soit un nombre positif entier ? Justifiez.

3. Une boîte contient trois bonbons à la fraise et deux bonbons à la menthe. Lior sort au hasard un bonbon de la boîte. Si le bonbon est à la menthe, il le remet dans la boîte, et si le bonbon est à la fraise, il le mange immédiatement.

א. Lior sort trois bonbons de la boîte, l'un après l'autre, de la manière décrite au début de la question.

(1) Calculez la probabilité que Lior mange exactement un bonbon.

(2) Calculez la probabilité que Lior ait mangé le deuxième bonbon qu'il a sorti, si l'on sait qu'il a mangé exactement un bonbon.

א. Lior sort n bonbons de la boîte, l'un après l'autre, de la manière décrite au début de la question.

Exprimez en fonction de n la probabilité que Lior mange au moins un bonbon.

א. Lior a reçu deux boîtes de bonbons, chacune des boîtes étant identique à la boîte décrite au début de la question. Lior sort trois bonbons de chacune des deux boîtes, l'un après l'autre, de la manière décrite au début de la question.

Calculez la probabilité que Lior mange exactement trois bonbons, provenant tous trois de la même boîte.

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de rayon R (voir figure).

Le côté BC est un diamètre du cercle.

AG est le prolongement du côté CA .

Le segment GB coupe le cercle en un point D .

Donnée : $GA = AC$.

⌘. Démontrez que la droite AB est la bissectrice de $\angle GBC$.

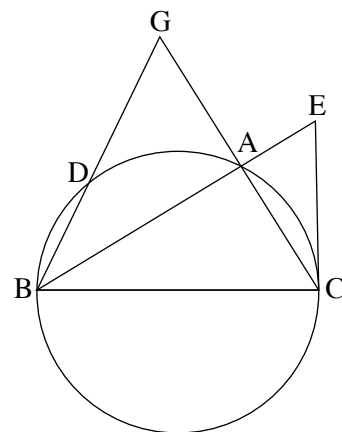
Ⓐ. Démontrez que $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

On sait que $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

Ⓜ. Exprimez la longueur du côté AC en fonction de R .

On a tracé une tangente au cercle passant par le point C , qui coupe le prolongement du segment BA en un point E .

Ⓣ. Calculez combien de fois l'aire du triangle CBE est plus grande que l'aire du triangle ABC .



5. AB est le diamètre d'un cercle de rayon R et de centre O . La corde CD coupe le diamètre AB en un point F .

La tangente au cercle au point D coupe le prolongement du diamètre AB en un point E (voir figure).

On note : $\angle ADE = \alpha$.

⌘. Montrez que $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$.

On sait que $ED = FD$.

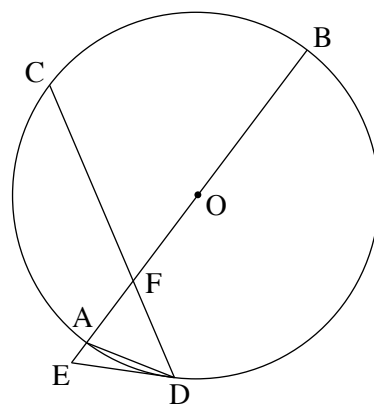
Ⓐ. Exprimez la mesure de l'angle $\angle CDA$ en fonction de α .

Ⓜ. Exprimez l'aire du triangle AFD en fonction de R et de α .

Ⓣ. (1) Exprimez le rapport des aires $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$ en fonction de α .

(2) On sait que $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

Déterminez α .



**Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes,
de fonctions racines, de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques**

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$, m est un paramètre positif.

א. Exprimez vos réponses en fonction de m , si cela est nécessaire.

(1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

(2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.

On sait que la fonction $f(x)$ admet un point d'extremum au point d'abscisse $x = (-1)$.

א. Déterminez la valeur de m .

Dans la fonction $f(x)$, substituez la valeur de m que vous avez déterminée, puis répondez aux articles ג-ה.

א. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

ב. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

ג. Soit la fonction $g(x) = k \cdot f(x)$, k est un paramètre négatif.

(1) Tracez une esquisse possible du graphe de la fonction $g(x)$.

(2) On trace une perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point d'extremum de $g(x)$ situé à gauche.

Il est donné que l'aire délimitée par la perpendiculaire, par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses vaut 1 (l'aire située à droite de la perpendiculaire).

Déterminez la valeur de k .

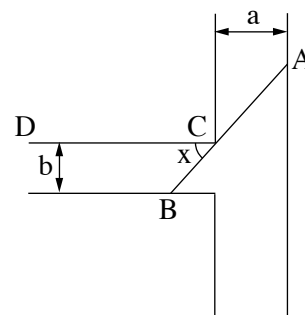
7. Soit la fonction $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
 - (2) Déterminez le domaine de définition de la fonction dérivée $f'(x)$.
 - (3) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction dérivée $f'(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
 - (4) Déterminez les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ avec l'axe des abscisses.
- Donnez des réponses avec deux chiffres après la virgule.
- (5) Tracez une esquisse du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$, si l'on sait que la fonction dérivée $f'(x)$ n'admet pas de point d'extremum.
- א. (1) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
 - (5) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
 - א. Est-il possible qu'une droite d'équation $y = 4x + c$ (c est un paramètre) soit tangente au graphe de la fonction $f(x)$? Justifiez.

8. Un canal d'eau principal de largeur constante a , est relié perpendiculairement à un canal secondaire de largeur constante b . Le point C est le point de jonction entre une paroi du canal principal et une paroi du canal secondaire (voir figure).

Une ingénieure conçoit un barrage droit, qui part du point A situé sur une paroi du canal principal, qui passe par le point C et qui arrive jusqu'au point B situé sur une paroi du canal secondaire.

Le barrage forme un angle mesurant x avec la paroi CD du canal secondaire, tel que cela est décrit sur la figure.



א. Exprimez la longueur AB du barrage en fonction de a , b et x .

Il est donné que $a = 2b$.

- א. Déterminez la valeur de x pour laquelle la longueur AB du barrage sera minimale.
- א. On sait que la longueur minimale du barrage vaut 8. Déterminez b .

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך