

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מטמקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך –

$4 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון לפי בחירת הנבחן.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

2. התחל כל שאלה בעמוד חדש.

רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיטה" בראש כל עמוד המשמש טיטה. תתיבת טיטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלול לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован!

Желаем успеха!

בהצלחה!

Вопросы

Обратите внимание: объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на четыре из вопросов 1-8 (за каждый вопрос – 25 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на четыре вопроса, будут проверены только первые четыре из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Нэта, Даниэла и Рони тренируются в ходьбе и беге на маршруте АВ, длина которого 40 км.

В 8:00 Нэта вышла из точки А и пошла со скоростью 4 км/час в направлении точки В.

В 9:36 Даниэла вышла из точки В и побежала в направлении точки А.

Через два часа после выхода Нэты Рони вышла из точки В и побежала со скоростью 12 км/час в направлении точки А.

Нэта и Рони встретились, а затем каждая из них продолжила свой путь.

Через один час 36 минут после того, как Нэта и Рони встретились, Даниэла прибыла в точку А.

Скорость каждой из спортсменок была постоянной на всем протяжении тренировки.

(κ) В котором часу Нэта и Рони встретились?

(α) С какой скоростью бежала Даниэла? Обоснуйте свой ответ.

(λ) Встретились ли все три спортсменки в одной точке на маршруте? Обоснуйте свой ответ.

Прибыв в финишную точку маршрута, каждая спортсменка немедленно разворачивается и возвращается в свою стартовую точку.

(τ) На каком расстоянии от точки В Нэта и Рони встретились во второй раз? Обоснуйте свой ответ.

2. Дана бесконечная геометрическая прогрессия a_n , члены которой $a_1, a_2, a_3, \dots$ и знаменатель которой q .

(к) Выразите при помощи a_1 и q значения сумм, приведенных ниже:

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40}$.

Дано, что a_n – возрастающая прогрессия и что $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

(а) Найдите значение q .

Из данной прогрессии a_n строят бесконечную геометрическую прогрессию b_n , в которой для любого натурального n выполняется: $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$.

(а) Найдите знаменатель прогрессии b_n .

Строят новую бесконечную геометрическую прогрессию $-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \dots$.

(т) Выразите сумму всех членов этой новой прогрессии при помощи a_1 .

Дана прогрессия $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$.

(н) (1) Возможно ли, что эта прогрессия является арифметической? Обоснуйте свой ответ.

(2) Возможно ли, что эта прогрессия является геометрической? Обоснуйте свой ответ.

3. В спортивном соревновании, которое состоялось в школе, участвует много учеников. Каждый участник должен преодолеть 3 препятствия одно за другим, по порядку. Участник, который не смог преодолеть препятствие, немедленно отстраняется от дальнейшего участия в соревновании. Вероятность преодолеть препятствие различна для различных препятствий, но равна для всех участников. Участник, который смог преодолеть все три препятствия, выходит в полуфинал. 28% участников соревнования смогли преодолеть два первых препятствия. Вероятность того, что участник, который сумел преодолеть два первых препятствия, будет отстранен от дальнейшего участия, в 3 раза больше, чем вероятность того, что он выйдет в полуфинал.

(к) Вычислите вероятность того, что участник соревнования выйдет в полуфинал.

Вероятность того, что участник сможет преодолеть первое препятствие, но не преодолеет второе препятствие, равна 0.42.

(а) Вычислите вероятность того, что участник соревнования не сможет преодолеть первое препятствие.

(а) Случайным образом выбраны три участника: Омер, Галь и Лиор. Известно, что все трое смогли преодолеть первое препятствие.

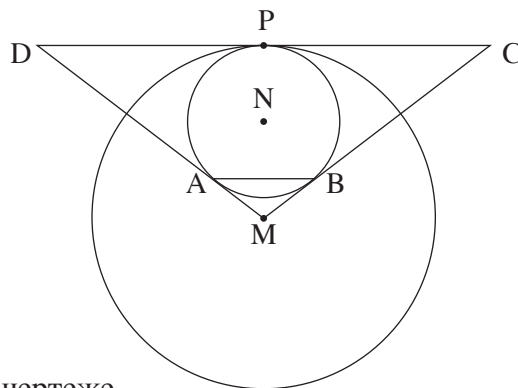
(1) Вычислите вероятность того, что в точности двое из них выйдут в полуфинал.

(2) Вычислите вероятность того, что из трех этих участников только Омер и Галь выйдут в полуфинал.

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Две окружности касаются друг друга изнутри в точке P (смотрите чертеж).

Центры окружностей находятся в точках M и N ,
 а их радиусы – R_1 и R_2 соответственно, $R_2 < R_1$.
 Проводят общую касательную к обеим окружностям
 через точку P .



Из точки M выходят две прямые, касательные
 к окружности с центром N в точках A и B .
 Эти прямые пересекают общую касательную
 к обеим окружностям в точках C и D , как показано на чертеже.

- (а) Докажите, что $AB \perp MN$.
 (б) Докажите, что $AB \parallel DC$.
 (в) Докажите, что $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

Дано: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

- (г) (1) Найдите R_1 и R_2 .
 (2) Найдите DC .

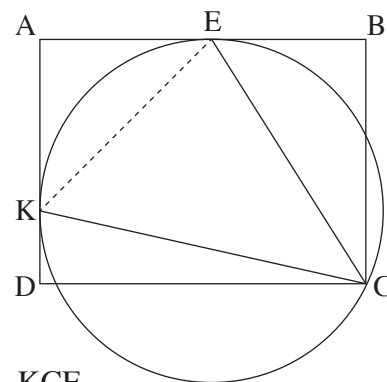
5. Четырехугольник $ABCD$ – это прямоугольник, две стороны которого AB и AD , являются
 касательными к окружности с радиусом R в точках E и K
 соответственно (смотрите чертеж).

Точка C расположена на окружности.

- (а) Докажите: $\angle KCE = 45^\circ$.

Дано: $\angle KCD = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

- (б) (1) Выразите при помощи α углы треугольника KCE .
 (2) Выразите при помощи R и α длины сторон треугольника KCE .
 (в) Выразите при помощи α отношение $\frac{EB}{AE}$.



Дано: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (г) Вычислите α .

Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$ – параметр.

Выразите свои ответы при помощи a , если это необходимо.

(а) Найдите область определения функции $f(x)$.

(б) Докажите, что функция $f(x)$ четная.

(в) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат (если таковые существуют).

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

(3) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(4) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $(f(x))^2$, область определения которой идентична области определения функции $f(x)$.

(г) Найдите координаты точек экстремума функции $(f(x))^2$ и определите их тип.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$, область определения которой идентична области определения функции $f(x)$.

(д) Воспользуйтесь предыдущими пунктами вопроса и начертите схематический график функции $g(x)$.

Подставьте $a = 2$.

(е) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = 3$ и $x = 4$.

7. Дана функция: $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + 3$.

Ответьте на вопросы следующих пунктов для области $0 \leq x \leq 2\pi$.

- (а) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$.
- (4) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (б) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Даны две функции: $k(x) = f(x) - 3$, $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$.

- (а) Один из приведенных графиков а-г описывает функцию $k(x)$, а другой описывает функцию $g(x)$.

Определите, какой из графиков описывает каждую из этих функций, и обоснуйте свое утверждение.

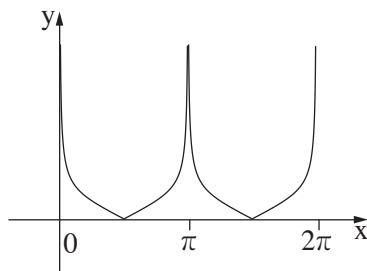


График а

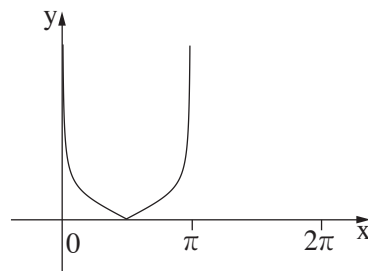


График б

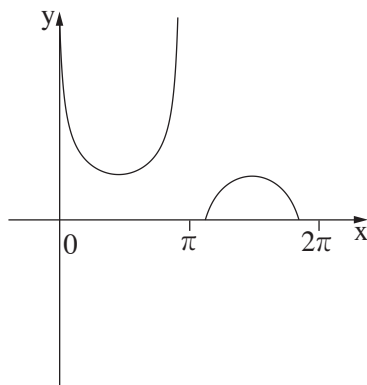


График в

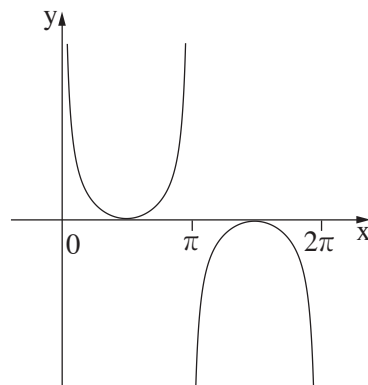
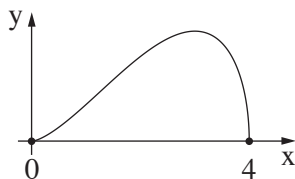


График г

8. Ниже изображен график функции $f(x) = \sqrt{a \cdot x^4 + b \cdot x^3}$.

Дано, что область определения функции $f(x)$: $0 \leq x \leq 4$.



(8) (1) Докажите, что $b = -4 \cdot a$.

(2) Ниже приведены два утверждения I и II. Только одно из них верно. Определите, какое утверждение верно, и обоснуйте свой ответ.

I $a > 0, b < 0$

II $a < 0, b > 0$

Точка Р расположена на графике функции $(f(x))^2$, которая также определена в области $0 \leq x \leq 4$. Из точки Р проводят прямую, перпендикулярную оси x . М – точка пересечения этого перпендикуляра с осью x , а О – начало координат.

(2) Какова координата x точки Р, для которой площадь треугольника РМО максимальна? Обоснуйте свой ответ.

(2) Для координаты x , которую вы нашли в пункте (2), выразите при помощи a максимальную площадь треугольника РМО.

(7) Если известно, что координата x точки Р располагается в области, в которой функция $(f(x))^2$ не убывает, какова координата x точки Р, для которой площадь треугольника РМО максимальна? Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.